Maße und Integrale

begleitend zur Vorlesung Stochastik I
Humboldt-Universität zu Berlin
SS 2008
P. Imkeller

Berlin, den 26. April 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Konstruktion von Maßen

Wie wir aus der Stochastik wissen, benötigen wir σ-additive Mengenfunktionen (*Maße*) auf Mengensystemen, die wir σ-Algebren genannt haben. Da solche Systeme in der Regel sehr komplex sind, muß man bei der Konstruktion der Mengenfunktionen auf einfachen Teilsystemen anfangen, wobei man ihre *Additivitätseigenschaften* stets im Auge behält. Um immer das wichtigste Beispiel vor Augen zu haben, verfolgen wir den Konstruktionsprozeß anhand des *Lebesguemaßes*, das die Intuition der *Länge* präzisiert, oder allgemeiner von *Intervallmaßen* auf der reellen Achse.

Definition

Sei $\mathscr{C} = \{]a,b] : \ a,b \in \mathbb{R}, \ a \leq b\}$, $\lambda(]a,b]) := b - a, \quad]a,b] \in \mathscr{C}$.
λ entspricht dem elementaren Begriff von **Länge** in $\mathbb{R}$.
Sei $G : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, rechtsstetig (d.h. für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{s \downarrow t} G(s) = G(t)$).
Für $]a,b] \in \mathscr{C}$ sei

$$\mu_G(]a,b]) := G(b) - G(a).$$

Minimalforderung an Maße: Additivität.

Additivität für μ_G

Seien $]a_i,b_i] \in \mathscr{C}$, $1 \leq i \leq n$, p.d. mit $]a,b] = \bigcup_{i=1}^n]a_i,b_i]$. Dann gilt

$$\mu_G(]a,b]) = G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^n G(b_i) - G(a_i) = \sum_{i=1}^n \mu_G(]a_i,b_i]).$$

Beispiel 1

a) Für

$$G(t) = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

erhalten wir $\mu_G = \lambda$.

b) Für
$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, 1_{[n,n+1[}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$
ist μ_G das **Zählmaß** auf $\mathbb{N}$.

Definition

Sei X Menge, $\mathscr{P}(X) = \{A : A \subset X\}$ Potenzmenge von X, $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty] = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$

- **(endlich) additiv**, wenn für $(A_i)_{1 \le i \le n} \subset \mathscr{C}$ p.d. gilt
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathscr{C} \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i),$$

- **σ-additiv**, wenn für $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{C}$ p.d. gilt
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \mathscr{C} \Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Bemerkung

Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir dabei $\infty + x = x + \infty = \infty$.

Definition

Sei $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann

- $\mathscr{A}$ **Ring**, wenn $\emptyset \ne \mathscr{A}$ und $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$, $A \setminus B (= A \cap B^c) \in \mathscr{A}$,

- $\mathscr{A}$ **Algebra**, wenn $\mathscr{A}$ Ring und $X \in \mathscr{A}$,

- $\mathscr{A}$ **σ-Algebra**, wenn $\mathscr{A}$ Algebra und $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$
$$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathscr{A}.$$

Bemerkung

1. $\emptyset \ne \mathscr{A}$ Algebra genau dann, wenn gilt:

(i) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$,

(ii) $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$ (bzw. $A \cap B \in \mathscr{A}$).

2. $\emptyset \neq \mathscr{A}$ σ-Algebra genau dann, wenn

(i) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$,

(ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$ (bzw. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.)

Beweis

1.

a) $\mathscr{A}$ Ring mit $X \in \mathscr{A}$.
Dann $A^c = X \setminus A \in \mathscr{A}$, d.h. (i) gilt.
$A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathscr{A}$, also gilt (ii). ($A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow (A^c \cup B^c)^c \in \mathscr{A}$.)

b) Es gelten (i) und (ii).
Dann wegen $\mathscr{A} \neq \emptyset$: ex. $A \in \mathscr{A}$, also $A \cup A^c = X \in \mathscr{A}$.
Seien $A, B \in \mathscr{A} \Rightarrow A \setminus B = A \cap B^c \in \mathscr{A}$.
Also $\mathscr{A}$ Ring mit $X \in \mathscr{A}$.

2. folgt leicht aus 1. $\square$

Hat $\mathscr{C}$ eine dieser Abschlußeigenschaften?

Beispiel 2

$\mathscr{C} = \{]a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ ist kein Ring (also auch keine Algebra oder σ-Algebra), denn $]0, 1] \cup]2, 3] \notin \mathscr{C}$.

Mengensysteme mit solchen Abschlußeigenschaften entstehen kanonisch, wenn man einfachere Mengensysteme in der folgenden Weise *abschließt*.

Definition

Sei $\emptyset \neq \mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$. Dann
$r(\mathscr{C}) = \bigcap\{\mathscr{B} : \ \mathscr{B} \text{ Ring}, \mathscr{C} \subset \mathscr{B}\}$ der von $\mathscr{C}$ **erzeugte Ring**,
$\alpha(\mathscr{C}) = \bigcap\{\mathscr{B} : \ \mathscr{B} \text{ Algebra}, \mathscr{C} \subset \mathscr{B}\}$ die von $\mathscr{C}$ **erzeugte Algebra**.
Entsprechend $\sigma(\mathscr{C})$ von $\mathscr{C}$ **erzeugte σ-Algebra**.

In der Tat haben diese Systeme die gewünschten Abschlußeigenschaften und sind nichttrivial, denn $\mathscr{P}(X)$ ist σ-Algebra.

Beispiel 3

Es gilt:

$$r(\mathscr{C}) = \Big\{ \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i] :]a_i, b_i]_{1 \le i \le n} \text{ p.d. Mengen in } \mathscr{C} \Big\}.$$

Beweis

Sei

$$\mathscr{B} := \Big\{ \bigcup_{i=1}^{n}]a_i, b_i] :]a_i, b_i]_{1 \le i \le n} \text{ p.d. Mengen in } \mathscr{C} \Big\}.$$

Dann $\mathscr{B}$ Ring:

$$]a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \in \mathscr{B}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$ (vollständige Induktion über n).
Jeder $\mathscr{C}$ enthaltende Ring enthält auch $\mathscr{B}$. Damit folgt $r(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$. □

$r(\mathscr{C})$ ist keine Algebra, denn $\mathbb{R} \notin r(\mathscr{C})$.
Es gilt: $\alpha(\mathscr{C})$ ist das System aller endlichen Vereinigungen p.d. Mengen der Bauart

$$]-\infty, b],\ ]a, b],\ ]b, \infty[, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$\alpha(\mathscr{C})$ ist keine σ-Algebra, denn z.B. $\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, 0] \notin \alpha(\mathscr{C})$.

Theorem 1 „Kriteritum für σ-Additivität“

Sei $\mathscr{A}$ Ring, $\mu: \mathscr{A} \to [0, \infty[$ endlich additiv. Dann
μ σ-additiv $\Leftrightarrow$ $[\mathscr{A} \ni A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu(A_n) \to 0$ für $n \to \infty]$ (μ *schwach σ-stetig*).

Beweis

"$\Rightarrow$": $\mathscr{A} \ni A_n \downarrow \emptyset$, $B_n = A_n \setminus A_{n+1},\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ p.d. in $\mathscr{A}$
und $A_m = \bigcup_{n \ge m} B_n,\ m \in \mathbb{N}$. Also

$$\mu(A_m) = \sum_{n \ge m} \mu(B_n) \to 0 \quad (m \to \infty)$$

(da μ σ-additiv).

"$\Leftarrow$": $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ p.d. mit $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{A}$. Sei $A_n = \bigcup_{m\geq n} B_m$.
Dann $A_n = B \setminus (B_1 \cup \ldots \cup B_{n-1}) \in \mathscr{A}$ und

$$\mu(A_n) = \mu(B) - \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i\Big) = \mu(B) - \sum_{i=1}^{n-1} \mu(B_i) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

d.h.

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \mu(B_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Also ist μ σ-additiv. □

Definition

$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ σ-Algebra. Dann $\mu : \ \mathscr{F} \to [0,\infty]$ **Maß**, wenn $\mu(\emptyset) = 0$, μ σ-additiv.

Theorem 2 „Caratheodory"

$\mathscr{A}$ Ring über X, μ σ-additiv auf $\mathscr{A}$, $\mu(\emptyset) = 0$. Dann gibt es ein Maß μ auf $\sigma(\mathscr{A})$, das μ fortsetzt.

Beweis

1. **Definition** des äußeren Maßes: für $E \subset X$ sei

$$\mu^*(E) := \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : \ E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A} \Big\} \quad (\inf(\emptyset) := \infty).$$

   Plan:

   a) studiere Eigenschaften von μ^*,

   b) schränke μ^* auf geeignetes Mengensystem ein, weise σ-Additivität darauf nach.

2. **Lemma 1**: $E \subset X, \ (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}(X)$ mit $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Dann

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \quad (\mu^* \ \sigma\text{-subadditiv}).$$

   Beweis: o.E.: $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$, zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $(A_{n,m})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit

$$E_n \subset \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A_{n,m}, \quad \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} > \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}).$$

Dann
$$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \subset \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} A_{n,m},$$
also
$$\mu^*(E) \leq \sum_{n,m\in\mathbb{N}} \mu(A_{n,m}) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$
ε war beliebig. □

3. **Lemma 2**:
$$\mu^*|_{\mathscr{A}} = \mu.$$
Beweis:

a) **Zeige**: $\mu^*(A) \leq \mu(A)$, $A \in \mathscr{A}$.
Sei $A_1 = A,\ A_2 = \emptyset,\ A_3 = \emptyset, \ldots \Rightarrow (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ und $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

b) **Zeige**: $\mu^*(A) \geq \mu(A),\ A \in \mathscr{A}$
$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$
$B_n = A \cap (A_n \setminus \bigcup_{j<n} A_j) \in \mathscr{A}$, p.d. und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A$. Also
$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu^*(A).$$
□

4. **Definition** der *guten Mengen*
$F \subset X$ *μ^*-messbar (gut)*, wenn für $E \subset X$ gilt
$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c).$$
Sei $\mathscr{M}$ die Gesamtheit aller *guten Mengen*. Es gilt:
$$F\ \mu^*\text{-messbar} \Leftrightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F) + \mu^*(E \cap F^c), \quad E \in X.$$
Lemma 3: $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}$
Beweis: $A \in \mathscr{A}$, $E \in \mathscr{P}(X)$, o.E. $\mu^*(E) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$ mit $E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und
$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$
Dann
$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A^c \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$
Also nach Definition von $\mu^*(E)$:
$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

5. **Lemma 4**: $\mathscr{M}$ σ-Algebra, $\mu^*|_{\mathscr{M}}$ Maß
   Beweis:

   i) $F \in \mathscr{M} \Rightarrow F^c \in \mathscr{M}$ (Definition).

   ii) Zunächst $A, B \in \mathscr{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{M}$. In der Tat: sei $E \subset X$; dann

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c) \\ &\geq \mu^*(E \cap (A \cap B)) + \mu^*(E \cap (A \cap B)^c) \quad \text{(Lemma 1)}. \end{aligned}$$

   Damit $A \cap B \in \mathscr{M}$.
   Somit gezeigt: $\mathscr{M}$ Algebra.

   iii) **Zeige**: $\mathscr{M}$ σ-Algebra.
   Sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{M}$, $F_n = \bigcup_{m=1}^n E_m$, $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.
   zz: $F \in \mathscr{M}$.
   Dabei o.E. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ p.d. ($\mathscr{M}$ Algebra). Sei $E \subset X$. Dann für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap F_n^c) + \mu^*(E \cap F_n) \\ &= \mu^*(E \cap F_n^c) + \mu^*(E \cap E_n) + \mu^*(E \cap F_{n-1}) \\ &\vdots \\ &= \mu^*(E \cap F_n^c) + \sum_{i=1}^n \mu^*(E \cap E_i). \end{aligned}$$

   Also nach Lemma 1($n \to \infty$)

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap F^c) + \mu^*(E \cap F) \quad .$$

   Also $F \in \mathscr{M}$. Damit auch μ^* σ-additiv (wähle $E = F$). $\square$ $\square$

Liefert Theorem 2 Fortsetzung von μ_G bzw. λ? Wir wissen, dass $\mathscr{C}$ kein Ring ist.

Theorem 3

$\mu_G(\emptyset) = 0$, $\mu_G \geq 0$, $\mu_G|_{\mathscr{C}}$ σ-additiv.

Beweis

1. **Zeige:** μ_G endlich subadditiv, d.h. $]a, b] \subset \bigcup_{j=1}^n]a_j, b_j]$, dann

$$\mu_G(]a, b]) \leq \sum_{j=1}^n \mu_G(]a_j, b_j]).$$

   Induktion über n:

i) $n = 1$ trivial.

ii) $n - 1 \to n$: $\exists\, j :\ a_j < b \leq b_j$, o.E. $j = n$ (Umnumerieren).
Fall 1: $a_n \leq a$ klar (Induktionsanfang).
Fall 2: $a_n > a$. Dann

$$]a, a_n] \subset \bigcup_{j=1}^{n-1}]a_j, b_j],$$

also

$$\mu_G(]a, a_n]) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mu_G(]a_j, b_j]) \quad \text{(Induktionsannahme)},$$

$$\mu_G(]a, b]) \leq \mu_G(]a, a_n]) + \mu_G(]a_n, b]) \leq \sum_{j=1}^{n-1} \mu_G(]a_j, b_j]) + \mu_G(]a_n, b_n]).$$

2. **Zeige:** μ_G σ-additiv.
Seien dazu $(]c_n, d_n])_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}$ p.d. mit $]c, d] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]c_n, d_n]$.

$'' \geq''$: für $n \in \mathbb{N}$ gilt $]c, d] \supset \bigcup_{j=1}^{n}]c_j, d_j]$,
o.E. (Umnumerierung) $c \leq c_1 \leq d_1 \leq c_2 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n \leq d$. Dann

$$\mu_G(]c, d]) = G(d) - G(e) \geq \sum_{j=1}^{n} (G(d_j) - G(c_j)) = \sum_{j=1}^{n} \mu_G(]c_j, d_j]).$$

Mit $n \to \infty$ folgt $'' \geq''$.

$'' \leq''$: Sei $\varepsilon > 0$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle δ_n, so dass $G(d_n + \delta_n) < G(d_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $\delta > 0$, so dass $G(c + \delta) < G(c) + \varepsilon$. Dann

$$[c + \delta, d] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]c_n, d_n + \delta_n[.$$

Also ex. $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$[c + \delta, d] \subset \bigcup_{n=1}^{m}]c_n, d_n + \delta_n[\subset \bigcup_{n=1}^{\infty}]c_n, d_n + \delta_n] \quad \text{(Kompaktheit)}.$$

Damit

$$\begin{aligned} \mu_G(]c, d]) - \varepsilon &= G(d) - G(c) - \varepsilon \\ &\leq G(d) - G(c + \delta) \\ &= \mu_G(]c + \delta, d]) \\ &\leq \sum_{n=1}^{m} \mu_G(]c_n, d_n + \delta_n]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \mu_G(]c_n, d_n + \delta_n]) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (G(d_n + \delta_n) - G(c_n)) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} (G(d_n) - G(c_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_G(]c_n, d_n]) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

ε war beliebig. □

$\mathscr{C}$ ist kein Ring! Aber ein System der folgenden Bauart:

Definition

$\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt **Semiring**, wenn gilt

i) $\emptyset \in \mathscr{S}$,

ii) $A, B \in \mathscr{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{S}$, $A \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ mit $(C_j)_{1 \le j \le n} \subset \mathscr{S}$ paarweise disjunkt.

Beispiel 4

$\mathscr{C} = \{]a, b] : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ ist Semiring.

Wir schließen die Lücke zwischen Theorem 3 und Theorem 2, indem wir Mengenfunktionen von Semiringen auf die davon erzeugten Ringe fortsetzen.

Theorem 4

$\mathscr{S}$ Semiring, $\mathscr{A}$ Gesamtheit aller endlichen Vereinigungen paarweise disjunkter Mengen in $\mathscr{S}$. Dann $\mathscr{A} = r(\mathscr{S})$.

Beweis

i) $\emptyset \in \mathscr{S} \Rightarrow \mathscr{A} \ne \emptyset$.

ii) $A, B \in \mathscr{A}$, $A = \bigcup_{1 \le i \le n} A_i$, $B = \bigcup_{1 \le j \le m} B_j$, $(A_i)_{1 \le i \le n}, (B_j)_{1 \le j \le m} \subset \mathscr{S}$ p.d.
Zeige: $A \cap B \in \mathscr{A}$. Es ist $A \cap B = \bigcup_{1 \le i \le n, 1 \le j \le m} A_i \cap B_j \in \mathscr{A}$.

Zeige: $A \setminus B \in \mathscr{A}$.
Dabei o.E. $n = 1$, d.h. $A \in \mathscr{S}$.
Dann $A \setminus B = \bigcap_{1 \le j \le m} A \setminus B_j = (\cdots((A \setminus B_1) \setminus B_2) \setminus \ldots \setminus B_m) \in \mathscr{A}$.
Zeige: $A \cup B \in \mathscr{A}$.
Es ist $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \in \mathscr{A}$ p.d.
Also $r(\mathscr{S}) \subset \mathscr{A}$. Andererseits $\mathscr{A} \subset r(\mathscr{S})$ (Definition). Also $\mathscr{A} = r(\mathscr{S})$. □

Die Fortsetzung σ–additiver Mengenfunktionen von Semiringen auf Ringe ist kanonisch.

Theorem 5 „Maß-Existenz“

$\mathscr{S}$ Semiring, $\alpha : \ \mathscr{S} \to [0, \infty]$ additiv, $\mathscr{A} = r(\mathscr{S})$. Für $(C_j)_{1 \le j \le n} \subset \mathscr{S}$ p.d. sei

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} C_j\Big) = \sum_{1 \le j \le n} \alpha(C_j).$$

Dann ist μ wohldefiniert, additiv auf $\mathscr{A}$.
Ist α σ-additiv auf $\mathscr{S}$, so ist μ σ-additiv auf $\mathscr{A}$. In diesem Fall existiert eine Fortsetzung von $\alpha|_{\mathscr{S}}$ zu einem Maß $\mu|_{\sigma(\mathscr{S})}$.

Beweis

1. **Zeige**: μ wohldefiniert.
   Seien $(C_i)_{1 \le i \le m}$, $(D_j)_{1 \le j \le n}$ p.d. in $\mathscr{S}$ mit $\bigcup_{1 \le i \le m} C_i = \bigcup_{i \le j \le n} D_j$. Dann

$$\begin{aligned}
\mu\Big(\bigcup_{1 \le i \le m} C_i\Big) &= \sum_{1 \le i \le m} \alpha(C_i) \\
&= \sum_{1 \le i \le m} \alpha\Big(\bigcup_{1 \le j \le n} (C_i \cap D_j)\Big) \\
&= \sum_{1 \le i \le m} \sum_{1 \le j \le n} \alpha(C_i \cap D_j) \\
&= \sum_{1 \le j \le n} \alpha\Big(\bigcup_{1 \le i \le m} (C_i \cap D_j)\Big) \\
&= \sum_{1 \le j \le n} \alpha(D_j) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{1 \le j \le n} D_j\Big).
\end{aligned}$$

2. Additivität von μ: trivial.

3. **Zeige**: α σ-additiv $\Rightarrow$ μ σ-additiv.
Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{A}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = B \in \mathscr{A}$. Sei $B = \bigcup_{1\le j\le n} C_j$, $(C_j)_{1\le j\le n} \subset \mathscr{S}$ p.d., $A_i = \bigcup_{1\le j\le k_i} A_{ij}$, $(A_{ij})_{1\le j\le k_i} \subset \mathscr{S}$ p.d. Dann

$$B = \bigcup_{1\le i\le n} C_i = \bigcup_{1\le i\le n} \bigcup_{r\in\mathbb{N}} (C_i \cap A_r) = \bigcup_{1\le i\le n} \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \bigcup_{1\le j\le k_r} \underbrace{(C_i \cap A_{rj})}_{\in\mathscr{S}\text{ p.d.}}.$$

Also

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha(C_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{r\in\mathbb{N}} \sum_{1\le j\le k_r} \alpha(C_i \cap A_{rj}) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{1\le j\le k_r} \alpha(C_i \cap A_{rj}) \\
&= \sum_{r\in\mathbb{N}} \mu(A_r).
\end{aligned}$$

4. Wende Theorem 2 an. Es gilt $\sigma(\mathscr{S}) = \sigma(\mathscr{A})$. □

Aus Theorem 5 und Theorem 3 folgt, daß sich μ_G fortsetzen läßt. Damit ist das Intervallmaß μ_G auf den Borelmengen der von $\mathcal{C}$ erzeugten σ–Algebra erklärt.

Korollar 1

G monoton wachsend, rechtsstetig, $\mu_G(]a,b]) := G(b) - G(a)$, $]a,b] \in \mathscr{C}$. Dann lässt sich μ_G zu einem Maß auf $\mathscr{B}^1 = \sigma(\mathscr{C})$ (siehe Stochastik I) fortsetzen.

Beweis

Theorem 3, Theorem 5. □

Gibt es weitere Fortsetzungen? Der angestrebte Eindeutigkeitssatz basiert auf dem folgenden Theorem von Dynkin.

Definition

Ein System $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(X)$ heißt $\cap$-**stabil** (π-**System**), wenn $A, B \in \mathscr{L} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{L}$, λ-**System**, wenn gilt

i) $X \in \mathscr{L}$,

ii) $A, B \in \mathscr{L},\ A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathscr{L}$,

iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L},\ A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathscr{L}$.

Theorem 6 „Dynkin“

Sei $\mathscr{P}$ $\cap$-stabil, $\mathscr{L}$ λ-System mit $\mathscr{P} \subset \mathscr{L}$. Dann gilt: $\sigma(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}$.

Beweis

1. **Zeige**: $\mathscr{L}$ λ-System und $\cap$-stabil $\Rightarrow$ $\mathscr{L}$ σ-Algebra.

   i) $A \in \mathscr{L} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathscr{L}$,

   ii) $A, B \in \mathscr{L} \Rightarrow A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \in \mathscr{L}$,

   iii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L} \Rightarrow B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathscr{L}$, $n \in \mathbb{N}$ und $B_n \uparrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{L}$.

   Damit folgt $\mathscr{L}$ σ-Algebra.

2. **Zeige**: $l(\mathscr{P}) = \bigcap\{\mathscr{M} :\ \mathscr{M}\ \lambda\text{-System},\ \mathscr{P} \subset \mathscr{M}\} \Rightarrow l(\mathscr{P})$ λ-System und $\cap$-stabil.
   Für $A \subset X$ sei dazu $\mathscr{L}_A = \{B \subset X :\ B \cap A \in l(\mathscr{P})\}$.
   Sei $A \in \mathscr{P}$. Dann gilt $\mathscr{P} \subset \mathscr{L}_A$, $\mathscr{L}_A$ λ-System:

   i) $X \cap X = A \in \mathscr{P} \Rightarrow X \in \mathscr{L}_A$,

   ii) $B_1, B_2 \in \mathscr{L}_A,\ B_1 \subset B_2$.
   Daher $(B_2 \setminus B_1) \cap A = (B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A) \in l(\mathscr{P})$,
   und damit $B_2 \setminus B_1 \in \mathscr{L}_A$.

   iii) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}_A$, $B_n \uparrow B$.
   $\Rightarrow l(\mathscr{P}) \ni A \cap B_n \uparrow A \cap B$,
   $\Rightarrow A \cap B \in l(\mathscr{P})$,
   $\Rightarrow B \in \mathscr{L}_A$.

   Also $\mathscr{L}_A$ λ-System, und damit nach Definition von $l(\mathscr{P})$: $l(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}_A$, d.h. insgesamt gezeigt: $(*)$ für $A \in \mathscr{P}$, $B \in l(\mathscr{P})$ gilt: $A \cap B \in l(\mathscr{P})$.
   Gleiches Argument für $A \in l(\mathscr{P})$ liefert
   $(**)$ für $A \in l(\mathscr{P})$, $B \in l(\mathscr{P})$ gilt: $A \cap B \in l(\mathscr{P})$.

Also $l(\mathscr{P})$ $\cap$-stabil.

3. Mit 1. und 2. folgt $l(\mathscr{P})$ σ-Algebra, $l(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}$, also $\sigma(\mathscr{P}) \subset l(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}$. $\square$

Theorem 7 „Eindeutigkeit"

X Menge, $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2 \subset \mathscr{P}(X)$ σ-Algebren, $\nu_1|_{\mathscr{F}_1}, \nu_2|_{\mathscr{F}_2}$ Maße, $\mathscr{P} \subset \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{F}_2$ $\cap$-stabil mit $\nu_1|_{\mathscr{P}} = \nu_2|_{\mathscr{P}}$. Es gebe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}$ mit $A_n \uparrow X$ und $\nu_1(A_n) = \nu_2(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Dann

$$\nu_1|_{\sigma(\mathscr{P})} = \nu_2|_{\sigma(\mathscr{P})}.$$

Beweis

1. Sei $A \in \mathscr{P}$ mit $\nu_1(A) = \nu_2(A) < \infty$, $\mathscr{L} = \{B \subset X : \ \nu_1(A \cap B) = \nu_2(A \cap B)\}$.
   Zeige: $\sigma(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}$.
   zz: $\mathscr{L}$ λ-System ($\mathscr{P} \subset \mathscr{L}$).

   i) $X \in \mathscr{L}$: trivial.

   ii) $B_1, B_2 \in \mathscr{L}, \ B_1 \subset B_2$:
   $$\begin{aligned} \nu_1((B_1 \setminus B_1) \cap A) &= \nu_1((B_2 \cap A) \setminus (B_1 \cap A)) \\ &= \nu_1(B_2 \cap A) - \nu_1(B_1 \cap A) \\ &= \nu_2(B_2 \cap A) - \nu_2(B_1 \cap A) \qquad (B_1, B_2 \in \mathscr{L}) \\ &= \nu_2((B_2 \setminus B_1) \cap A). \end{aligned}$$
   Daher $B_2 \setminus B_1 \in \mathscr{L}$.

   iii) $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$, $B_n \uparrow B$:
   $$\begin{aligned} \nu_1(B \cap A) &= \lim_{n\to\infty} \nu_1(B_n \cap A) \qquad (\sigma\text{-Stetigkeit von } \nu_1) \\ &= \lim_{n\to\infty} \nu_2(B_n \cap A) \qquad (B_n \in \mathscr{L}) \\ &= \nu_2(B \cap A). \end{aligned}$$
   Daher $B \in \mathcal{L}$.

2. Sei $B \in \sigma(\mathscr{P})$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{P}$ gemäß Voraussetzungen, $A_0 := \emptyset$. Dann gilt
   $$\begin{aligned} \nu_1(B) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu_1(B \cap (A_n \setminus A_{n-1})) \qquad (\nu_1 \text{ Maß}) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu_2(B \cap (A_n \setminus A_{n-1})) \qquad (1.) \\ &= \nu_2(B) \qquad (\nu_2 \text{ Maß}). \end{aligned}$$

$\square$

Damit ist die Fortsetzung von μ_G auf $\mathcal{B}^1$ eindeutig.

Korollar 2

Sei $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, rechtsstetig. Dann existiert genau ein Maß $\mu_G|_{\mathscr{B}^1}$ mit den Eigenschaften

$$\mu_G(]a,b]) = G(b) - G(a), \quad]a,b] \in \mathscr{C}.$$

Beweis

Sei $\mathscr{P} = \mathscr{C}$, $A_n =]-n, n[$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $\mu_G(A_n) = G(n) - G(-n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Wende Theorem 7 an. $\square$

Bezeichnung

Für $G(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, schreibe auch $\lambda = \mu_G$ (λ **Lebesguemaß**).

Definition

Ein Maß $\mu|_{\mathscr{F}}$ heißt

- σ-**finit**, wenn es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ gibt mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$, $\mu(A_n) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$,
- **finit**, wenn $\mu(X) < \infty$,
- **Wahrscheinlichkeitsmaß**, wenn $\mu(X) = 1$.

Bemerkung

Verteilungsfunktionen reellwertiger Zufallsvariablen legen daher deren Verteilungen eindeutig fest.

Beweis

$F_X(x) = P_X(]-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$. Aber $\mathscr{C} = \{]-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ $\cap$-stabil mit $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{B}^1$. $\square$

2 Konstruktion von Integralen

Sei $(X, \mathscr{F})$ messbarer Raum. Wir definieren Integrale zunächst auf Treppenfunktionen. Natürlich müßen integrierbare Funktionen meßbar sein.

Definition

$f: \ X \to \mathbb{R}$ **einfach (elementar)**, wenn

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i}, \quad B_i \in \mathscr{F}, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Beispiel 1

$X = \mathbb{R}$, $\mathscr{B}^1 = \mathscr{F}$,

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{]b_i, c_i]}, \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \quad b_i \leq c_i, \quad 1 \leq i \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sei $\mu|_{\mathscr{F}}$ ein Maß.

Schritt 1: Integration nichtnegativer einfacher Funktionen

Sei $0 \leq f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i}$ einfach mit $a_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$. Dann sei

$$\int f \ d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(B_i) \quad (\in [0, \infty]) \quad (0 \cdot \infty = 0).$$

Ist diese Definition sinnvoll?
Problem: mehrdeutige Darstellungen einfacher Funktionen.

Definition

$\mathscr{A}$ Algebra. Dann $A \in \mathscr{A}$ **Atom**, wenn $\emptyset \neq A$ und $B \in \mathscr{A} \Rightarrow B \subset A$ oder $A \cap B = \emptyset$.

Beispiel 2

$X = \{1, \ldots, n\}$, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(X)$. Dann $\{i\}$, $1 \leq i \leq n$ Atom von $\mathscr{F}$.
$\{\{i\} : \ 1 \leq i \leq n\}$ ist eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte Atome.

Lemma 1

$B_1, B_2, \ldots, B_n \subset X$, $\mathscr{A} = \alpha(\{B_1, \ldots, B_n\})$,

$$\mathscr{C} = \Big\{ \underbrace{\bigcap_{i \in T} B_i \cap \bigcap_{i \notin T} B_i^c}_{=:A_T} : \ T \subset \{1, \ldots, n\} \Big\}.$$

Dann: $\mathscr{C} \setminus \{\emptyset\}$ Menge der Atome von $\mathscr{A}$.
Jede Menge in $\mathscr{A}$ ist paarweise disjunkte Vereinigung von Atomen in $\mathscr{C}$.

Beweis

1. **Zeige**: $A_1, A_2 \in \mathscr{C} \Rightarrow A_1 = A_2$ oder $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $\bigcup\{A : \ A \in \mathscr{C}\} = X$.
   Seien $A_1 = A_{T_1}$, $A_2 = A_{T_2}$ mit $T_1 \neq T_2$, o.E. $i_0 \in T_1, \ i_0 \notin T_2$. Dann

   $$\begin{aligned} A_{T_1} &= \bigcap_{i \in T_1} B_i \cap \bigcap_{i \notin T_1} B_i^c \subset B_{i_0}, \\ A_{T_2} &= \bigcap_{i \in T_2} B_i \cap \bigcap_{i \notin T_2} B_i^c \subset B_{i_0}^c. \end{aligned}$$

   Also $A_{T_1} \cap A_{T_2} = \emptyset$.
   Sei $x \in X$. Sei $T = \{i : \ 1 \leq i \leq n, \ x \in B_i\}$. Dann $x \in A_T$.

2. **Zeige**: $\mathscr{B}$ Gesamtheit aller endlichen paarweise disjunkten Vereinigungen von Mengen in $\mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{B} = \mathscr{A}$.
   Denn:

   i) $\mathscr{C} \subset \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ Algebra.

   ii) $B_i = \bigcup_{i \in T} \left[\bigcap_{j \in T} B_i \cap \bigcap_{j \notin T} B_j^c \right] \in \mathscr{B}, \ 1 \leq i \leq n \Rightarrow \mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. $\square$

Lemma 2

Für $0 \leq f$ einfach ist $\int f \; d\mu$ wohldefiniert.

Beweis

1. Zunächst existiert zu $0 \leq f$ einfach eine atomare Darstellung, d.h. eine Darstellung mit $\alpha_i \geq 0$, $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ paarweise disjunkt.

2. Sei
$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{E_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j \mathbb{1}_{H_j}, \quad a_i, b_j \geq 0.$$
o.E. $(H_j)_{1 \leq j \leq m}$ Atome der Algebra $\alpha(\{E_i, H_j : \; 1 \leq i \leq n, \; 1 \leq j \leq m\})$ (Lemma 1). Dann $b_j = \sum_{E_i \supset H_j} a_i$, $1 \leq j \leq m$, falls $H_j \neq \emptyset$. Damit
$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} b_j \mu(H_j) &= \sum_{j=1}^{m} \Big(\sum_{E_i \supset H_j} a_i \Big) \mu(H_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j: \; H_j \subset E_i} \mu(H_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \qquad \Big(\bigcup_{j: \; H_j \subset E_i} H_j = E_i \text{ p.d.} \Big).
\end{aligned}$$

□

Lemma 3

i) Seien $0 \leq f, g$ einfach $\Rightarrow f + g, \; f \cdot g, \; f \wedge g, \; f \vee g$ einfach ($f \vee g := \max\{f, g\}$, $f \wedge g := \min\{f, g\}$).

ii) $0 \leq f \leq g$, f, g einfach $\Rightarrow \int f \; d\mu \leq \int g \; d\mu$.

iii) $0 \leq f, g$ einfach, $c > 0 \Rightarrow \int (f + cg) \; d\mu = \int f \; d\mu + c \int g \; d\mu$.

Beweis

o.E. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{B_i}$, $g = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbb{1}_{B_i}$, $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ p.d. (Lemma 1). Damit sind die Eigenschaften evident. □

Wir wollen Funktionen mit Werten $\pm\infty$ zulassen. Daher setze $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $\bar{\mathscr{B}} = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{-\infty, +\infty\} : \ A \in \mathscr{B}\}$. Dann $\bar{\mathscr{B}}$ σ-Algebra auf $\bar{\mathbb{R}}$.

Schritt 2: Integration nichtnegativer messbarer Funktionen

Sei $f \geq 0$, f $\mathscr{F} - \bar{\mathscr{B}}$-messbar. Dann sei

$$\int f \ d\mu := \sup \left\{ \int g \ d\mu : \ 0 \leq g \leq f, \ g \text{ einfach} \right\} \ (\leq \infty).$$

Lemma 4

$0 \leq f$ $\mathscr{F} - \bar{\mathscr{B}}$-messbar. Dann existiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfacher Funktionen mit $0 \leq f_n \uparrow f$. Für jede solche Folge gilt

$$\int f_n \ d\mu \uparrow \int f \ d\mu.$$

Beweis

1. **Konstruktion der Folge**:
   Für $x \in \mathbb{R}$ sei $[x] := \sup\{j : \ j \in \mathbb{Z}, \ j \leq x\}$. Sei
   $$f_n = 2^{-n} \Big[2^n \cdot f \Big] \wedge n, \quad n \in \mathbb{N}.$$
   Dann gilt
   $$\left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\} = \left\{ f_n = \frac{i}{2^n} \right\}, \quad 0 \leq i \leq n \cdot 2^n.$$
   Also f_n einfach, $0 \leq f_n \uparrow f$.

2. **Zeige**: $0 \leq g \leq f$, g einfach, $\int g \ d\mu < \infty \Rightarrow \int g \ d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \ d\mu$.
   Sei $g = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{B_i}$, $B = \bigcup_{i=1}^n B_i$, o.E. $\mu(B) < \infty$. Sei $\varepsilon > 0$, für $n \in \mathbb{N}$ sei
   $$E_n = \{x \in X : \ f_n(x) < g(x) - \varepsilon\}.$$
   Dann $B \supset E_n \downarrow \emptyset$, also
   $$\int f_n \ d\mu \quad \geq \quad \int f_n \mathbb{1}_{E_n^c \cap B} \ d\mu$$

$$\begin{aligned}
&\geq \quad \int (g-\varepsilon)\mathbb{1}_{E_n^c\cap B}\; d\mu \quad \text{(Lemma 3)}\\
&= \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\mu(B_i\cap E_n^c) - \varepsilon\mu(E_n^c\cap B)\\
&\xrightarrow{n\to\infty} \quad \int g\; d\mu - \varepsilon\mu(B) \quad (\sigma\text{-Stetigkeit von } \mu).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sup \int f_n\; d\mu \geq \int g\; d\mu \quad (\varepsilon$ beliebig),
$\Rightarrow \sup \int f_n\; d\mu \geq \int f\; d\mu$,
$\leq$ trivial wegen $f_n \leq f,\ n \in \mathbb{N}$. □

Theorem 1

$(X,\mathscr{F})$, $(Y,\mathscr{G})$, $(Z,\mathscr{H})$ messbare Räume, $f:\ X\to Y$ $\mathscr{F}-\mathscr{G}$-messbar, $g:\ Y\to Z$ $\mathscr{G}-\mathscr{H}$-messbar. Dann: $g\circ f:\ X\to Z$ $\mathscr{F}-\mathscr{H}$-messbar.

Beweis

Sei $C\in\mathscr{H}$. Dann

$$(g\circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[\underbrace{g^{-1}[C]}_{\in\mathscr{G}}] \in \mathscr{F}.$$

□

Theorem 2

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge $\mathscr{F}-\bar{\mathscr{B}}$-messbarer Funktionen. Dann $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} = \inf_{n\in\mathbb{N}}\sup_{m\geq n} f_m$, $\liminf_{n\to\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\inf_{m\geq n} f_m$ $\mathscr{F}-\bar{\mathscr{B}}$-messbar. Gilt $f_n\to f$, so ist auch f $\mathscr{F}-\bar{\mathscr{B}}$-messbar.

Beweis

z.B. $\{\sup f_n > t\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{f_n > t\}\in\mathscr{F}$, $t\in\mathbb{R}$, also $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar ($\{]t,\infty[:\ t\in\mathbb{R}\}$ Erzeuger von $\bar{\mathscr{B}}$).
Falls $f_n\to f$, gilt $f = \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$. □

Lemma 5

$0\leq f,g$ $\mathscr{F}-\bar{\mathscr{B}}$-messbar, $c>0$. Dann

i) $f+g,\ f\cdot g,\ f\wedge g,\ f\vee g$ $\mathscr{F}-\bar{\mathscr{B}}$-messbar,

ii) $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$,

iii) $\int (f + cg) \, d\mu = \int f \, d\mu + c \int g \, d\mu$.

Beweis
Wähle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einfach mit $0 \leq f_n \uparrow f$, $0 \leq g_n \uparrow g$.
Dann $0 \leq f_n + g_n$, $f_n \cdot g_n$, $f_n \wedge g_n$, $f_n \vee g_n$ einfach (Lemma 3) mit monotoner Konvergenz gegen $f + g$, $f \cdot c$, $f \wedge g$, $f \vee g$. Also folgt i) aus Theorem 2. Ferner nach Lemma 3

$$\begin{array}{ccccc} \int (f_n + cg_n) \, d\mu & = & \int f_n \, d\mu & + & c \int g_n \, d\mu, \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \int (f + cg) \, d\mu & = & \int f \, d\mu & + & c \int g \, d\mu. \end{array}$$

Also gilt iii) (Lemma 4). ii) folgt direkt aus Definition. $\square$

Schritt 3: Integration von Funktionen mit positiven und negativen Werten

Für $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sei $f^+ := f \vee 0$, $f^- := -f \vee 0$. Dann $f = f^+ - f^-$ und f messbar $\Rightarrow f^+$, f^-, $|f| = f^+ + f^-$ messbar. Denn

$$\{f^+ > t\} = \begin{cases} X & t < 0 \\ \{f > t\} & t \geq 0 \end{cases} \in \mathscr{F}, \text{ also } f^+ \text{ messbar.}$$

Sei

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu,$$

falls $\int f^+ \, d\mu < \infty$ oder $\int f^- \, d\mu < \infty$.
Schreibweisen: $\int f(x) \, \mu(dx)$, $\int f(x) \, d\mu(x)$, $d\lambda(x) =: dx$

Lemma 6

$f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ messbar, $f \leq g$, $\int f \, d\mu$, $\int g \, d\mu$ existieren. Dann gilt

$$\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

Beweis

O.E. $\int f\ d\mu > -\infty$. Dann $\int f^-\ d\mu < \infty \Rightarrow \int g^- d\mu \leq \int f^-\ d\mu$ (Lemma 5), andererseits $\int f^+\ d\mu \leq \int g^+\ d\mu$. Also

$$\int f\ d\mu = \int f^+\ d\mu - \int f^-\ d\mu \leq \int g^+\ d\mu - \int g^-\ d\mu = \int g\ d\mu.$$

$\square$

Definition

$f\ :\ X \to \mathbb{R}$ μ-**integrierbar**, wenn $\int |f|\ d\mu < \infty$. Sei $\mathscr{L}^1(X, \mathscr{F}, \mu)$ ($\mathscr{L}^1(\mu), \mathscr{L}^1$) die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen. Für $f \in \mathscr{L}^1$, $A \in \mathscr{F}$ sei

$$\int_A f\ d\mu := \int \mathbb{1}_A \cdot f\ d\mu \quad (|\mathbb{1}_A \cdot f| \leq |f|,\ \text{Lemma 5}).$$

Theorem 3

Für $f, g \in \mathscr{L}^1$, $c \in \mathbb{R}$, gilt $f + cg \in \mathscr{L}^1$ und

$$\int (f + cg)\ d\mu = \int f\ d\mu + c \int g\ d\mu.$$

Ferner gilt

$$\Big| \int f\ d\mu \Big| \leq \int |f|\ d\mu.$$

Beweis

1. $f + cg$ messbar als Komposition von $x \mapsto (f(x), g(x))$ und $(x, y) \mapsto x + cy$. Wende Theorem 1 an.

2. **Zeige**: $\int cg\ d\mu = c \int g\ d\mu$.
   Für $c = -1$: Definition und $(-g)^+ = -g^-$ etc.
   Für $c \geq 0$: Definition und Lemma 5.
   Sonst verwende $c = |c| \cdot \text{sgn}(c)$.

3. **Zeige**: $f + g \in \mathscr{L}^1$, $\int (f + g)\ d\mu = \int f\ d\mu + \int g\ d\mu$.
   Sei $h = f + g$. Dann $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, also $h^+ \leq f^+ + g^+$, $h^- \leq f^- + g^-$.

Also $\int h^+ \, d\mu,\ \int h^- \, d\mu < \infty \Rightarrow h \in \mathscr{L}^1$ (Lemma 5). Ferner

$$\begin{aligned}
\int h \, d\mu &= \int h^+ \, d\mu - \int h^- \, d\mu \\
&= \int (f^+ + g^+) \, d\mu - \int (f^- + g^-) \, d\mu \\
&= \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu - \int g^- \, d\mu \\
&= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.
\end{aligned}$$

4.

$$\Big| \int f \, d\mu \Big| = \Big| \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \Big| \le \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu \quad (3.).$$

□

Definition

$\mathbb{P}$ Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathscr{F})$, X $\mathscr{F} - \bar{\mathscr{B}}$-messbar (Zufallsvariable). Dann

$$\mathbb{E}(X) := \int X \, d\mathbb{P}, \quad \text{falls } X \in \mathscr{L}^1$$

Erwartungswert von X.

3 Eigenschaften von Maß und Integral

Wir stellen die wichtigsten Eigenschaften von Maß und Integral zusammen.

Theorem 1 „Transformationssatz“

$(X, \mathscr{F})$, $(Y, \mathscr{G})$ messbare Räume, $T: X \to Y$ $\mathscr{F} - \mathscr{G}$-messbar, $\mu|_{\mathscr{F}}$ Maß. Dann

$$\mu_T(A) = \mu(T^{-1}[A]), \quad A \in \mathscr{G},$$

Maß auf $\mathscr{G}$ (auch: $\mu \circ T^{-1}$ Bildmaß von μ unter T) und

$$\int f \, d\mu_T = \int f \circ T \, d\mu, \quad f: Y \to \bar{\mathbb{R}} \text{ messbar},$$

falls eines von beidem existiert.

Beweis

1. μ_T Maß:

   i) $\mu_T(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$

   ii) $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ p.d. $\Rightarrow (T^{-1}[A_n])_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ p.d., also

$$\begin{aligned} \mu_T\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \mu\Big(T^{-1}\Big[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big]\Big) \\ &= \mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}[A_n]\Big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^{-1}[A_n]) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_T(A_n). \end{aligned}$$

2. i) $f = c \cdot \mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{G}$, $c > 0$: $\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}[A]}$, Definition,

ii) $0 \leq f$ einfach: Teil i), Linearität,

iii) $0 \leq f$ messbar: Lemma 2.4, Teil ii),

iv) $f = f^+ - f^-$; gültig wegen iii) für f^+, f^- Linearität. □

Der Integralbegriff ist unabhängig von Mengen des μ-Maßes 0. Sei $(X, \mathscr{F}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition

Eine Eigenschaft $E(x)$, $x \in X$, gilt μ-**fast-überall** (μ-f.ü.), falls $A \in \mathscr{F}$ existiert mit $\mu(A^c) = 0$ und $E(x)$ gilt für $x \in A$.

Beispiel

$f = g$ μ-f.ü. $\Leftrightarrow \mu(\{f \neq g\}) = 0$ für f, g messbar,
$f \leq g$ μ-f.ü. $\Leftrightarrow \mu(\{f > g\}) = 0$ für f, g messbar.

Lemma 1

$f, g : X \to \bar{R}$ messbar mit $f = g$ μ-f.ü. Dann gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$, falls eines von beiden existiert.

Beweis

zz: $0 \leq h$ messbar, $A \in \mathscr{F}$ mit $\mu(A^c) = 0 \Rightarrow \int h \, d\mu = \int_A h \, d\mu$
(Anwendung auf f^+, g^+, f^-, g^- und $A = \{f = g\}$).

i) $h = \mathbb{1}_B$, $B \in \mathscr{F}$: Definition,

ii) $0 \leq h$, h einfach: i), Linearität,

iii) $0 \leq h$ messbar: Lemma 2.4. □

Mit Lemma 1 lassen sich viele Eigenschaften von Integralen, die für $=$ bzw. $\leq$ an Funktionen bewiesen wurden, auf $=$ μ-f.ü. bzw $\leq$ μ-f.ü. verallgemeinern. Das trifft z.B. auf Lemma 2.6 und die folgenden Konvergenzsätze zu. Wir formulieren ohne $=$ μ-f.ü. bzw. $\leq$ μ-f.ü.
Denn: $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Mengen mit $\mu(N_n) = 0$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n) = 0$ (μ σ-subadditiv).

Theorem 2 „monotone Konvergenz"

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge messbarer Funktionen mit Werten in $\bar{\mathbb{R}}$, $f_n \uparrow f$, $\int f_1 \, d\mu > -\infty$. Dann

$$\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu.$$

Beweis

0. f messbar nach Theorem 2.2.

1. **Zeige**: $\int f_n^+ \, d\mu \uparrow \int f^+ \, d\mu$.
   Für $n \in \mathbb{N}$ wähle Folge $(f_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen mit $0 \le f_{n,m}$, $m \in \mathbb{N}$, $f_{n,m} \uparrow f_n^+$ (Lemma 2.4).
   Sei $g_n = \max\{f_{n,1}, \dots, f_{n,n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $0 \le g_n$ einfach, $g_n \uparrow f^+$ und
   $$\begin{aligned} \int f^+ \, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int g_n \, d\mu \\ &\le \lim_{n\to\infty} \int f_n^+ \, d\mu \quad \text{(Lemma 2.4)} \\ &\le \int f^+ \, d\mu. \end{aligned}$$

2. **Zeige**: $\int f_n^- \, d\mu \downarrow \int f^- \, d\mu$.
   Es gilt $0 \le f_n^- <\downarrow f^-$, $\int f_1^- < \infty$. Betrachte $g_n = f_1^- - f_n^-$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $0 \le g_n \uparrow f_1^- - f^-$. Also
   $$\begin{aligned} \int f_1^- \, d\mu - \int f^- \, d\mu &= \int g_n \, d\mu \\ &\uparrow \int (f_1^- - f^-) \, d\mu \\ &= \int f_1^- \, d\mu - \int f^- \, d\mu \quad \text{(Linearität).} \end{aligned}$$
   Daher
   $$\int f_n^- \, d\mu \downarrow \int f^- \, d\mu.$$

3. Kombiniere 1. und 2. □

Theorem 3 „Fatou"

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge nichtnegativer, messbarer Funktionen. Dann

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis

Nach Definition
$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m.$$
Sei $g_n = \inf_{m\geq n} f_m$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $g_n \uparrow \liminf_{n\to\infty} f_n$. Also

$$\begin{aligned}
\int \liminf_{n\to\infty} f_n \; d\mu &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\int g_n \; d\mu}_{\leq \inf_{m\geq n} \int f_m \; d\mu} \qquad \text{(Theorem 2)} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} \int f_m \; d\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int f_m \; d\mu.
\end{aligned}$$

□

Theorem 4 „majorisierte Konvergenz“

Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$, $|f_n| \leq g$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n \to f$. Dann $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$,
$$\int |f_n - f| \; d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
insbesondere
$$\int f_n \; d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \; d\mu.$$

Beweis

o.E.: $0 \leq f_n \to 0$ (sonst betrachte: $|f_n - f| \leq 2g$). Für $n \in \mathbb{N}$ sei $j_n = \sup_{m\geq n} f_m$. Dann $0 \leq f_n \leq j_n$, $n \in \mathbb{N}$, $j_n \downarrow 0$. Ferner $\int j_1 \; d\mu < \infty$ ($g \in \mathscr{L}^1(\mu)$). Also nach Theorem 2 (für $j_1 - j_n$)
$$0 \leq \limsup_{n\to\infty} \int f_n \; d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int j_n \; d\mu = 0.$$

□

Korollar 1

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von Funktionen, messbar mit $0 \leq f_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt
$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \; d\mu.$$

Beweis

Sei $g_n = \sum_{m \le n} f_m$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $g_n \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (Theorem 2) und

$$\sum_{m \le n} \int f_m \, d\mu = \int g_n \, d\mu \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu \quad \text{(Linearität)}.$$

□

Korollar 2

$0 \le f$ messbar, Riemann-integrierbar auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$. Dann stimmen Lebesgue- und Riemann-Integral überein.

Beweis

o.E.: betrachte f auf kompaktem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (monotone Konvergenz).
Sei $(\mathbb{J}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ in Intervalle J, so dass $\mathbb{J}_{n+1} \supset \mathbb{J}_n$, $\sup_{J \in \mathbb{J}} |t_J - s_J| \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann sei $I(f)$ Riemann-Integral von f. Es gilt

$$\begin{aligned} I(f) &= \lim_{n\to\infty} \overline{I}_n(f) = \lim_{n\to\infty} \underline{I}_n(f), \text{ wobei} \\ \underline{I}_n(f) &= \sum_{J \in \mathbb{J}_n} \inf_J f \cdot \lambda(J), \\ \overline{I}_n(f) &= \sum_{J \in \mathbb{J}_n} \sup_J f \cdot \lambda(J). \end{aligned}$$

Dann gilt mit

$$\underline{f}_n = \sum_{J \in \mathbb{J}} \inf_J f \cdot \mathbb{1}_J, \quad \overline{f}_n = \sum_{J \in \mathbb{J}_n} \sup_J f \cdot \mathbb{1}_J$$

$\underline{f}_n \le f \le \overline{f}_n$, $n \in \mathbb{N}$, $\underline{f}_n \uparrow \underline{f}$, $\overline{f}_n \downarrow \overline{f}$. Also $\underline{f} \le f \le \overline{f}$, und

$$\underline{I}_n(f) = \int \underline{f}_n \, d\lambda \uparrow \int \underline{f} \, d\lambda, \quad \overline{I}_n(f) = \int \overline{f}_n \, d\lambda \downarrow \int \overline{f} \, d\lambda \quad \text{(Theorem 2)}.$$

Also $I(f) = \int \underline{f} \, d\lambda = \int \overline{f} \, d\lambda$, $\int \underline{f} \, d\lambda \le \int f \, d\lambda \le \int \overline{f} \, d\lambda$, d.h. $I(f) = \int f \, d\lambda$. □

Beispiel 1

$(X, \mathscr{F}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}^1, \lambda)$, $f_n = 1_{[n,2n]}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $f_n \to 0$ aber $\int f_n \, d\lambda \not\to 0$.
Es gibt keine integrierbare Majorante g.

Theorem 5 „Kettenregel"

Sei $0 \le f$ $\mathscr{F}$-$\bar{\mathscr{B}}$-messbar, $\nu(A) = \int_A f\, d\mu$, $A \in \mathscr{F}$. Dann $\nu|_{\mathscr{F}}$ Maß auf $\mathscr{F}$. Für $g \in \mathscr{L}^1(\nu)$ gilt

$$\int g\, d\nu = \int g \cdot f\, d\mu.$$

Bezeichnung: $\nu = f \cdot \mu$, ν Maß mit Dichte f bzgl. μ.

Beweis

1. **Zeige**: ν Maß,

   i) $\nu(\emptyset) = 0$.

   ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$ paarweise disjunkt, $g_n = \mathbb{1}_{\bigcup_{k\le n} A_k} \cdot f$, $n \in \mathbb{N}$. Dann $0 \le g_n \uparrow \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \cdot f$, also wegen monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}
\nu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= \int \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} \cdot f\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\le n} \underbrace{\int \mathbb{1}_{A_k} \cdot f\, d\mu}_{=\nu(A_k)} \quad \text{(Linearität)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

2. i) $g = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathscr{F}$: Definition,

   ii) $0 \le g$ einfach: Linearität,

   iii) $0 \le g$ messbar: Lemma 2.4, monotone Konvergenz,

   iv) $g = g^+ + g^-$, $g^+, g^- \in \mathscr{L}^1(\nu)$: iii), Linearität. $\square$

4 Produkträume

Wir studieren Produkte von Maßen auf Produkträumen und deren Integrale. Wir stellen dabei wieder ein Beispiel in den Mittelpunkt, die *Fläche* in $\mathbb{R}^2$.

Um Flächen zu definieren in $\mathbb{R}^2$, beginnt man z.B. mit Rechtecken

$$\lambda^2(A \times B) = \lambda(A) \cdot \lambda(B), \quad A, B \in \mathscr{B}^1.$$

Ziel: Fortsetzung von λ^2 auf σ-Algebra, die von Rechtecken erzeugt wird, zu einem Maß.

Seien allgemeiner $(X, \mathscr{F}, \mu)$, $(Y, \mathscr{G}, \nu)$ σ-finite Maßräume.

Definition

Sei $\mathscr{R} = \{B \times C : \ B \in \mathscr{F}, \ C \in \mathscr{G}\}$ (**Rechtecke**) und $\rho(B \times C) := \mu(B) \cdot \nu(C)$, $B \times C \in \mathscr{R}$ $(0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0)$.

Lemma 1

$\mathscr{R}$ ist ein Semiring.

Beweis

i) $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathscr{R}$,

ii) $B_i \times C_i \in \mathscr{R}$, $i = 1, 2 \Rightarrow (B_1 \times C_1) \cap (B_2 \times C_2) = (B_1 \cap B_2) \times (C_1 \cap C_2) \in \mathscr{R}$,

iii) $B_i \times C_i \in \mathscr{R}$, $i = 1, 2$; dann

$$\begin{aligned}(B_1 \times C_1) \setminus (B_2 \times C_2) &= (B_1 \times C_1) \cap (B_2 \times C_2)^c \\ &= (B_1 \times C_2) \cap [(B_2^c \times C_2) \cup (B_2^c \times C_2^c) \cup (B_2 \times C_2^c)] \\ &= [(B_1 \cap B_2) \times (C_1 \cap C_2^c))] \cup [(B_1 \cap B_2^c) \times (C_1 \cap C_2)] \\ &\quad \cup [(B_1 \cap B_2^c) \times (C_1 \cap C_2^c)]\end{aligned}$$

paarweise disjunkte Vereinigung aus Mengen in $\mathscr{R}$. $\square$

Lemma 2

$\rho|_{\mathscr{R}}$ ist σ-additiv.

Beweis

Sei $(B_n \times C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{R}$ paarweise disjunkt mit $\mathscr{R} \ni B \times C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \times C_n$. Für $(x,y) \in X \times Y$

$$\mathbb{1}_B(x) \cdot \mathbb{1}_C(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}(x) \cdot \mathbb{1}_{C_n}(y).$$

Sei $x \in X$ fest. Dann

$$\mathbb{1}_B(x)\nu(C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{B_n}(x)\nu(C_n) \quad \text{(monotone Konvergenz, Linearität)}$$

und damit

$$\underbrace{\mu(B) \cdot \nu(C)}_{\rho(B\times C)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\mu(B_n) \cdot \nu(C_n)}_{\rho(B_n\times C_n)} \quad \text{(monotone Konvergenz, Linearität).}$$

□

Theorem 1 „Produktmaß“

Es gibt genau ein σ-finites Maß $\rho|_{\mathscr{F}\otimes\mathscr{G}:=\sigma(\mathscr{R})}$ mit $\rho(B \times C) = \mu(B) \cdot \nu(C)$, $B \times C \in \mathscr{R}$.

Beweis

Seien $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{F}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{G}$ mit $A_n \uparrow X$, $B_n \uparrow Y$, $\mu(A_n), \nu(B_n) < \infty$. Dann

$$\mathscr{R} \ni A_n \times B_n \uparrow X \times Y, \quad \rho(A_n \times B_n) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$\mathscr{R}$ ist $\cap$-stabil. Wende Maßexistenz- und Eindeutigkeitssatz an. □

Notation: $\rho =: \mu \otimes \nu$ Produktmaß von μ und ν.

Lemma 3

Sei $E \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{lcl} x & \mapsto & \int_Y \mathbb{1}_E(x,y)\ \nu(dy) \\ y & \mapsto & \int_X \mathbb{1}_E(x,y)\ \mu(dx) \end{array}\right. \quad \text{sind messbar}$$

und

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \Big[\int_Y \mathbb{1}_E(x,y)\ \nu(dy) \Big] \mu(dx) = \int_Y \Big[\int_X \mathbb{1}_E(x,y)\ \mu(dx) \Big] \nu(dy).$$

Beweis

1. **Zeige**: für $x \in E$ ist $x \mapsto \mathbb{1}_E(x,y)$ messbar.
   Sei dazu $\mathscr{C} = \{E :\ y \mapsto \mathbb{1}_E(x,y) \text{ messbar}\}$. Dann $\mathscr{R} \subset \mathscr{C}$, $\mathscr{C}$ σ-Algebra.

   i) $E \in \mathscr{C} \Rightarrow y \mapsto \mathbb{1}_{E^C}(x,y) = 1 - \mathbb{1}_E(x,y)$ messbar $\Rightarrow E^c \in \mathscr{C}$,

   ii) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E} \Rightarrow y \mapsto \mathbb{1}_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n}(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_n}(x,y)$ messbar
   $\Rightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathscr{C}$,
   $\Rightarrow \mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \subset \mathscr{C}$.

2. **Zeige**: Behauptung gilt, falls $\mu(X) < \infty$, $\nu(Y) < \infty$.
   Sei dazu $\mathscr{L} = \{E :\ \text{Behauptung richtig für } E\}$. Dann: $\mathscr{L}$ λ-System:

   i) $X \times Y \in \mathscr{L}$: trivial,

   ii) $E_1, E_2 \in \mathscr{L}$, $E_1 \subset E_2$; dann

   $$\int_Y \mathbb{1}_{E_2 \setminus E_1}(x,y)\ \nu(dy) = \int_Y \mathbb{1}_{E_2}(x,y)\ \nu(dy) - \int_Y \mathbb{1}_{E_1}(x,y)\ \nu(dy)$$

   messbar und

   $$\begin{aligned} \int_X \Big[\int_Y \mathbb{1}_{E_2 \setminus E_1}(x,y)\ \nu(dy) \Big] \mu(dx) &= \int_X \Big[\int_Y \mathbb{1}_{E_2}(x,y)\ \nu(dy) \Big] \mu(dx) \\ &\quad - \int_X \Big[\int_Y \mathbb{1}_{E_1}(x,y)\ \nu(dy) \Big] \mu(dx) \\ &\quad \text{(Linearität)} \\ &= (\mu \otimes \nu)(E_2) - (\mu \otimes \nu)(E_1) \\ &= (\mu \otimes \nu)(E_2 \setminus E_1), \end{aligned}$$

   und eine analoge Gleichung für umgekehrte Reihenfolge.

   iii) $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}$, $E_n \uparrow E$, es gilt:

   $$\int_Y \mathbb{1}_E(x,y)\ \nu(dy) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \mathbb{1}_{E_n}(x,y)\ \nu(dy) \quad \text{(monotone Konvergenz)},$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\int_X \Big[\int_Y \mathbb{1}_E(x,y)\ \nu(dy) \Big] \mu(dx) &= \lim_{n\to\infty} \int_X \Big[\int_Y \mathbb{1}_{E_n}(x,y)\ \nu(dy) \Big] \mu(dx) \\
&\quad \text{(monotone Konvergenz)} \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mu\otimes\nu)(E_n) \\
&= (\mu\otimes\nu)(E) \quad (\sigma\text{-Stetigkeit von } (\mu\otimes\nu)),
\end{aligned}
$$

und eine analoge Gleichung für umgekehrte Reihenfolge. Ferner $\mathscr{R} \subset \mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ $\cap$-stabil. Also nach Theorem von Dynkin (π-λ-Theorem) gilt $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \subset \mathscr{L}$.

3. Verwende σ-Finitheit von μ, ν, $\mu\otimes\nu$, monotone Konvergenz ($A_n \times B_n \uparrow X \times Y$, $\mu(A_n), \nu(B_n) < \infty$).

Theorem 2 „Fubini, Tonelli“

Sei $f:\ X \times Y \to \bar{\mathbb{R}}_+$ messbar oder $f \in \mathscr{L}^1(\mu\otimes\nu)$. Dann

$$
\int_Y \Big[\int_X f(x,y)\ \mu(dx) \Big] \nu(dy) = \int f\ d(\mu\otimes\nu) = \int_X \Big[\int_Y f(x,y)\ \nu(dy) \Big] \mu(dx),
$$

wobei im 2. Fall die inneren Integrale auf den Nullmengen

$$
N = \Big\{ x \in X :\ \int_Y |f(x,y)| \nu(dy) = \infty \Big\}, \quad M = \Big\{ y \in Y :\ \int_X |f(x,y)| \mu(dx) = \infty \Big\}
$$

0 gesetzt werden.

Beweis

1. $f = \mathbb{1}_E$, $E \in \mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$: Lemma 3;

2. $0 \leq f$ einfach: Linearität der Integrale;

3. $0 \leq f$ messbar: Lemma 2.4, monotone Konvergenz, 2.;

4. $f \in \mathscr{L}^1(\mu\otimes\nu)$: wegen 3. ist

$$
x \mapsto \int_Y f^{\pm}(x,y)\ \nu(dy), \quad y \mapsto \int_X f^{\pm}(x,y)\ \mu(dx)
$$

messbar und die behauptete Gleichung gilt für $f^{\pm}$ mit endlichen Integralen. Also mit

$$
N_n = \Big\{ x \in X :\ \int_X |f(x,y)|\ \nu(dy) \geq n \Big\},
$$

$$
\begin{aligned}
M_n &= \left\{ y \in Y : \int_X |f(x,y)| \; \mu(dx) \geq n \right\} : \\
\mu(N_n) &\leq \frac{1}{n} \int_X \left[\int_Y |f(x,y)| \; \nu(dy) \right] \mu(dx) \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Entsprechend $\nu(M_n) \to 0$ für $n \to \infty$. Ferner $N = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_n$, sogar $N_n \downarrow N$, $M_n \downarrow M$. Also wegen σ-Stetigkeit von μ bzw. ν gilt: $\mu(N) = 0$, $\nu(M) = 0$. Verwende Linearität des Integrals. □