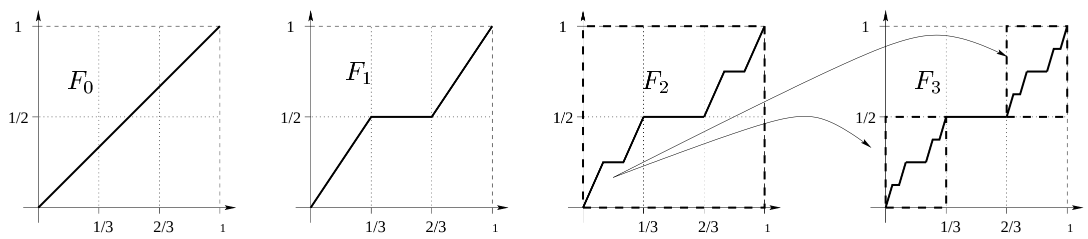
HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

**Blatt 10**
**WiSe 00/01**

## Übungen zur Einführung in die Stochastik

**Aufgabe 42./43.** Die Funktionen $F_n : [0,1] \to [0,1]$, $n \in \mathbb{N}_0$, seien rekursiv definiert durch

$$F_0(x) = x, \quad F_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}F_n(3x) & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}F_n(3(x-\frac{2}{3})) & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases}$$




Zeigen Sie:

a) Die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $F : [0,1] \to [0,1]$.

b) Die Funktion $F$ sei auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt durch $F(x) = 0$ für $x < 0$ und $F(x) = 1$ für $x > 1$. Nach Vorlesung existiert genau ein Maß $\mu$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ mit $\mu(]-\infty, x]) = F(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie, daß für alle $A \in \mathcal{B}^1$, $A \subset [0,1]$ gilt:

$$\mu(A) = \mu(\frac{1}{3}A \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}A).$$

(Dabei sei $\lambda A = \{\lambda x \ : \ x \in A\}$ und $\lambda + A = \{\lambda + x \ : \ x \in A\}$ für $A \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$.) (Hinweis: Maßeindeutigkeitssatz.)

c) Sei $C$ das (hoffentlich aus der Analysis bekannte) Cantorsche Diskontinuum.[1] Zeigen Sie, daß $\mu(C) = 1$. (8)

**Aufgabe 44.** Auf dem Intervall $[0,1]$ wird eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert durch $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Für $x \in [0,1]$ sei $\overline{x} = \{x \in [0,1] \ : \ y \sim x\}$ die Äquivalenzklasse von $x$. Nach dem Auswahlaxiom existiert eine Menge $V \subset [0,1]$, die aus jeder Äquivalenzklasse $\overline{x}$, $x \in [0,1]$, genau ein Element enthält.
Zeigen Sie, daß $V$ keine Borelmenge sein kann.
(Hinweis: Es ist $[0,1] \subset \bigcup_{a \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (a + V) \subset [-1,2]$. Nutzen Sie auch die Translationsinvarianz des Lebesguemaßes aus.) (4)

**Aufgabe 45.** Sei $(X_n)_{n \ge 0}$ eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum $S = \{1, \ldots, n\}$ und Übergangsmatrix $P$. Für $A \subset S$, $i \in S$ sei

$$H^A = \inf\{n \ge 0 \ : \ X_n \in A\}, \quad h_i^A = \mathbb{P}(H^A < \infty \mid X_0 = i).$$

a) Zeigen Sie: Der Vektor $h^A = (h_1^A, \ldots, h_n^A)$ ist Lösung des Gleichungssystems

$$(\star) \qquad \begin{aligned} h_i^A &= 1, & i &\in A \\ h_i^A &= \textstyle\sum_{j \in S} P_{ij} h_j^A, & i &\notin A. \end{aligned} \qquad (4)$$

b)$^\star$ Ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$ eine weitere nichtnegative Lösung von $(\star)$, so ist $x_i \ge h_i^A$ für alle $i \in S$. (4)

**Abgabe:** Dienstag, 16.1.01 vor der Übung

[1] Definiere rekursiv $C_0 = [0,1]$ und $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.