HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 11
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 46. Sei $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$. Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ eine Algebra mit $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$.
Zeigen Sie: Zu jedem $A \in \mathcal{F}$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $A' \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A \Delta A') \leq \epsilon$. (Dabei bezeichnet $A \Delta A' = (A \setminus A') \cup (A' \setminus A)$ die symmetrische Differenz von A und A'.) (4)

Aufgabe 47. Sei $(X, \mathcal{F})$ ein meßbarer Raum.

a) Sei $\mathcal{F}$ höchstens abzählbar. Zeigen Sie, daß sich X in $\mathcal{F}$-Atome zerlegen läßt. (Zur Erinnerung: Eine Menge $A \in \mathcal{F}$ heißt $\mathcal{F}$-Atom, falls $A \neq \emptyset$ und für alle $B \in \mathcal{F}$ gilt: $A \subset B$ oder $A \cap B = \emptyset$.)
(Hinweis: Es eine andere Konstruktion der Atome als in der Vorlesung notwendig, da nicht bekannt ist, ob $\mathcal{F}$ von endlich vielen Mengen erzeugt ist.)

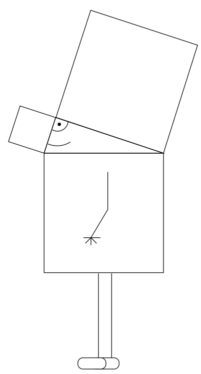
b) Folgern Sie aus a), daß $\mathcal{F}$ entweder endlich oder überabzählbar ist.
(Hinweis: Führen Sie die Annahme, daß $\mathcal{F}$ abzählbar unendlich ist zum Widerspruch, indem Sie zeigen, daß dann $\mathcal{F}$ gleichmächtig mit der Potenzmenge der Menge der $\mathcal{F}$-Atome ist.) (4)

Aufgabe 48. Sei P die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markovkette mit Periode d (bei endlichem Zustandsraum). Sei s ein (möglicherweise komplexer) Eigenwert von P mit $|s| = 1$. Zeigen Sie, daß $s^d = 1$. (4)

Aufgabe 49.

a) Seien $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1)$ mit Dichten $f, f_1, f_2, \ldots$ (bezüglich des Lebesguemaßes). Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelte $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
Gilt dann stets $\int_A f_n(x)dx \to \int_A f(x)dx$ für alle $A \in \mathcal{B}^1$?

b) Seien μ, ν_1, ν_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem meßbaren Raum $(X, \mathcal{F})$. Für $i = 1, 2$ besitze μ eine Dichte f_i bezüglich ν_i. Bestimmen Sie eine Dichte f von μ bezüglich des Maßes $\rho = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$. (4)



Aus meiner Galerie berühmter Mathematiker: **Pythagoras**

Abgabe: Dienstag, 23.1.01 vor der Übung