HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 13
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 54. Seien $X, X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariable mit $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ und $|X_n| < Z$, wobei Z eine Zufallsvariable ist mit $\mathbb{E}(Z) < \infty$.
Zeigen Sie, daß auch $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(Z)$.
(Hinweis: Sind die X_n nichtnegativ, so kann man Aufg. 53 benutzen).

Aufgabe 55. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen ($\mathbb{P}(X_n > x) = \mathrm{e}^{-x}$ für $x \geq 0$) und $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n) - \log n$, $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, daß die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzverteilung. (4)

Aufgabe 56. Finden Sie eine Folge (X_n) von Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, die in Wahrscheinlichkeit, aber nicht fast sicher konvergiert.
(Hinweis: Es geht mit $\Omega = [0,1]$, $\mathbb{P} = \lambda$ und Indikatorfunktionen von Intervallen.) (4)

Aufgabe 57. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Cauchyverteilten Zufallsvariablen (Dichte: $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$) und $Y_n = \frac{1}{n}\max(X_1, \ldots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, daß die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzverteilung.
(Hinweis: $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.) (4)

Abgabe: Dienstag, 7.2.01 vor der Übung