HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 2
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 6. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen:

a) X ist eine Zufallsvariable.

b) Für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}$ ist $X^{-1}(U) \in \mathcal{F}$. (4)

Aufgabe 7. Bei einem Fernsehquiz kann der Kandidat einen Porsche gewinnen, wenn er errät, hinter welcher der drei verschlossenen Türen A, B, C sich der Wagen befindet. Nachdem der Kandidat eine Tür T benannt hat, wird eine Tür $T' \in \{A, B, C\} \setminus \{T\}$ geöffnet, hinter der sich der Porsche nicht befindet (falls es zwei solche Türen gibt weil der Kandidat richtig geraten hat, wird jede mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ geöffnet); danach darf der Kandidat seine Entscheidung nochmal ändern. Wird durch diese Möglichkeit die Gewinnwahrscheinlichkeit des Kandidaten von $1/3$ auf $1/2$ erhöht?
Nehmen Sie an, daß der Kandidat nach dem Öffnen der Tür T' seine Entscheidung mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ ändert.
Argumentieren Sie mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. (4)

Aufgabe 8. Seien A, B, C unabhängige Ereignisse (in einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).
Gilt dann stets $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) \cdot \mathbb{P}(B \mid C)$? (Beweis oder Gegenbeispiel!) (4)

Aufgabe 9. Seien $A_0, A_1, \ldots, A_n$ unabhängige Ereignisse.
Sind dann A_0 und $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ unabhängig? (Beweis oder Gegenbeispiel!) (4)

Aufgabe 10*. Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge von Ereignissen (d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ unabhängig) in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) Die Menge $A_\infty \subset \Omega$ bezeichne das Ereignis "Es treten unendlich viele der Ereignisse A_i ein". Beschreiben Sie A durch mengentheoretische Operationen und zeigen Sie, daß $A_\infty \in \mathcal{F}$.

b) Zeigen Sie, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Ereignisse $A_\infty, A_1, \ldots, A_n$ sind unabhängig.

c) Zeigen Sie, daß $\mathbb{P}(A_\infty) \in \{0, 1\}$. (4)

Abgabe: Mittwoch, 7.11.00 vor der Übung