

Übungen zur Stochastik II

Aufgabe 9. Sei $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Sei (Ω', \mathcal{A}') ein meßbarer Raum und $Y : \Omega \rightarrow \Omega'$ meßbar. Zeigen Sie: Es existiert eine meßbare Funktion $g : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, so daß

$$\mathbb{E}(X | Y) = g(Y).$$

(Hinweis: Zeigen Sie allgemein, daß sich jede $\sigma(Y)$ -meßbare reellwertige Zufallsvariable Z als Funktion von Y darstellen läßt. Betrachten Sie zunächst den Fall, daß Z eine Indikatorfunktion ist.) (4)

Aufgabe 10. Seien X, Z unabhängige zum Parameter 1 poissonverteilte Zufallsvariable und $Y = X + Z$. Nach Aufg. 9 existiert eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\mathbb{E}(X | Y) = g(Y)$. Bestimmen Sie g . (4)

Aufgabe 11/12. Seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, \mathcal{A}) .

- (i) Zeigen Sie: Es existiert eine meßbare Funktion $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$, so daß für jedes $f \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \cap \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ gilt:

$$\int f d\nu = \int fg d\mu + \int fg d\nu.$$

(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, daß durch $\phi(f) := \int f d\nu$ ein stetiges lineares Funktional ϕ auf $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu + \nu)$ definiert wird.)

- (ii) Zeigen Sie mithilfe von (i): Falls $\nu \ll \mu$ (d.h. falls $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$ für $A \in \mathcal{A}$), so existiert eine meßbare Funktion $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit

$$\nu(A) = \int_A h d\mu$$

für alle $A \in \mathcal{A}$. (8)