Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 16. Finden Sie ein Beispiel für Zufallsvariable X, Y, die unkorreliert, aber nicht unabhängig sind. (4)

Aufgabe 17. Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, daß

$$\mathbb{E}(X) \;=\; \int_0^\infty P(X > t)dt.$$

(4)

Aufgabe 18. Seien $X_1, \ldots, X_n$ diskret verteilte reellwertige Zufallsvariable. Die Matrix $C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sei definiert durch $c_{i,j} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$, $1 \leq i, j \leq n$.
Zeigen Sie, daß C positiv semidefinit ist (d.h. daß $\langle x, Cx\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$). (4)

Aufgabe 19. Für diskret verteilte Zufallsvariable X, Y mit $\mathrm{Var}(X) > 0$ und $\mathrm{Var}(Y) > 0$ ist der Korrellationskoeffizient $\rho(X, Y)$ definiert durch

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{(\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y))^{1/2}}.$$

Zeigen Sie: Ist $|\rho(X, Y)| = 1$, so existiert eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $\mathbb{P}(Y = f(X)) = 1$. (4)

Aufgabe 20⋆. Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und unbekannter Varianz σ^2. Um μ und σ^2 aus den "Beobachtungen" $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ zu schätzen werden oft die Schätzer

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \\ \hat{\sigma^2} &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\mu})^2 \end{aligned}$$

verwendet. (Beachten Sie, daß $\hat{\mu}$ und $\hat{\sigma^2}$ Zufallsvariable sind!)
Wieso kommt in der Formel für $\hat{\sigma^2}$ der Faktor $\frac{1}{n-1}$ vor? (4)

Abgabe: Mittwoch, 21.11.00 vor der Übung