HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 5
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 21. Eine radioaktive Probe wird 10 Minuten lang beobachtet. Die Anzahl der während dieses Zeitraums emittierten α-Teilchen sei poissonverteilt zum Parameter $\lambda > 0$. Jedes emittierte Teilchen wird mit Wahrscheinlichkeit $p \in]0,1[$ vom Geigerzähler registriert. Bestimmen Sie die Verteilung der Anzahl der registrierten α-Teilchen. (4)

Aufgabe 22. Seien X, Y unabhängige zum Parameter 1 poissonverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die bedingte Verteilung und Erwartung von X, gegeben $X + Y = x$. (4)

Aufgabe 23. Sie würfeln so lange bis zum ersten Mal eine 6 erscheint. Es bezeichne N die Zahl der benötigten Würfe.
Bestimmen Sie die erzeugende Funktion sowie Erwartungswert und Varianz von N. (4)

Aufgabe 24. Seien X, Y diskrete reellwertige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}(|X|) < \infty$.
Zeigen Sie, daß für jede beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y) f(Y)) \;=\; \mathbb{E}(X f(Y)).$$

Aufgabe 25.* Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Sei N eine weitere von der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$ und $S = \sum_{i=1}^N X_i$. Es sei $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ und $\mathbb{E}(N^2) < \infty$.
Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{Var}(S) \;=\; \mathbb{E}(N)\mathrm{Var}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 \mathrm{Var}(N).$$

(Hinweis: Verwenden Sie die erzeugenden Funktionen von X_1, N und S.) (4)

Abgabe: Mittwoch, 29.11.00 vor der Übung