HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 6
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 26. Seien X, Y Zufallsvariable mit Werten in der höchstens abzählbaren Menge $S \subset \mathbb{R}$. Sei $f : S \times S \to \mathbb{R}$ beschränkt. Die Funktion $g : S \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(y) \;=\; \mathbb{E}(f(X,y)).$$

Gilt dann stets

$$\mathbb{E}(f(X,Y) \mid Y) \;=\; g(Y) \;?$$

(Beweis oder Gegenbeispiel!) (4)

Aufgabe 27. Sie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = p$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = q$, wobei $p + q = 1$ und $p < \frac{1}{2}$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Sei $M = \sup\{S_n \;:\; n \geq 0\}$.
Zeigen Sie, daß für alle $r \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathbb{P}(M \geq r) \;=\; \left(\frac{p}{q}\right)^r .$$

(Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{P}(M \geq r \mid M \geq r-1)$.) (4)

Aufgabe 28. (Fortsetzung der Ruinproblems) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. Seien $k, N \in \mathbb{N}$ mit $0 < k < N$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $S_n = k + X_1 + \ldots + X_n$. Sei $T = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 \mid S_n = 0 \text{ oder } S_n = N\}$.
Bestimmen Sie $\mathbb{E}(T)$.
(Hinweis: Zerlegung nach dem ersten Schritt) (4)

Aufgabe 29. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$.
Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $M_n = \max(S_0, \ldots, S_n)$.
Zeigen Sie, daß für alle $r, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(M_n \geq r) \;=\; 2\mathbb{P}(S_n \geq r+1) + \mathbb{P}(S_n = r).$$

(Hinweis: Zerlegen Sie das Ereignis $\{M_n \geq r\}$ mithilfe von S_n und überlegen Sie sich ein hilfreiches Bild.) (4)

Abgabe: Mittwoch, 6.12.00 vor der Übung