HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 7
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 30. Eine Population besteht zum Zeitpunkt 0 aus einem Individuum; jedes Individuum lebt nur eine Generation und vermehrt sich unabhängig von den anderen Individuen gemäß folgender Tabelle:

Anzahl Nachkommen	0	1	2
Wahrscheinlichkeit	0.1	0.5	0.2

Mit welcher Wahrscheinlichkeit stirbt die Population aus? (4)

Aufgabe 31. Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Verzweigungsprozeß, $\mu = \mathbb{E}(Z_1)$ und $0 < \mu < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $M_n = \frac{Z_n}{\mu^n}$.
Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_0, \dots, Z_n) \;=\; Z_n.$$

(Hinweis: Ist X eine von $Z_0, \dots, Z_n$ unabhängige Zufallsvariable und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist $\mathbb{E}(Xf(Z_n) \mid Z_0, \dots, Z_n) = f(Z_n)\mathbb{E}(X)$.) (4)

Aufgabe 32. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markovkette mit (abzählbarem) Zustandsraum S. Sei $F : S \to S$ beliebig und $Y_n = F(X_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Ist dann die Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ automatisch wieder eine Markovkette? (Beweis oder Gegenbeispiel!) (4)

Aufgabe 33. Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine einfache symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, d.h. $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, wobei $X_1, X_2, \dots$ unabhängig sind und $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.
Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) \;=\; \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

(Hinweis: Zeigen Sie, daß für $0 \leq s < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^{2n}\mathbb{P}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) \;=\; P_0(s).$$

Nutzen Sie dabei die Rekurrenz von $(S_n)_{n\geq 0}$ aus.) (4)

Achtung: neuer Abgabermin!

Abgabe: Dienstag, 12.12.00 vor der Übung