HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 8
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 34. Sei $\emptyset \neq \mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

(ii) $A \in \mathcal{U}$ und $A \subset B \subset \mathbb{N} \Rightarrow B \in \mathcal{U}$.

(iii) $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$.

(iv) Für alle $A \subset \mathbb{N}$ ist $A \in \mathcal{U}$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U}$.

(Ein Mengensystem $\mathcal{U}$ mit diesen Eigenschaften heißt *Ultrafilter*.)
Zusätzlich werde angenommen, daß $\mathcal{U}$ keine endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ enthält. Sei ferner $\mu : \mathbb{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \in \mathcal{U}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß μ (endlich) additiv, aber nicht σ-additiv ist. (4)

Fleißaufgabe: Zeigen Sie, daß ein derartiger Ultrafilter existiert. (ohne Bewertung)

Aufgabe 35. Sei X_n die Augenzahl, die beim n-ten unabhängigen Wurf eines Würfels erscheint und $X_n = \max(X_0, \dots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.
Ist die Folge $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette? Falls ja, so geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten an. (4)

Aufgabe 36. In einer Gruppe von N Personen herrscht eine Grippeepidemie. Folgende Annahmen mögen zutreffen:

a) Wenn eine kranke und eine gesunde Person miteinander in Kontakt kommen, so wird die gesunde Person mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \in]0,1[$ angesteckt.

b) Pro Zeiteinheit findet genau ein Kontakt statt; aller möglichen Kontakte sind gleichwahrscheinlich.

c) Wer angesteckt ist bleibt auch krank.

Beschreiben Sie die Ausbreitung der Grippeepidemie durch ein Markovkette indem Sie Zustandsraum und Übergangsmatrix angeben. (4)

Aufgabe 37. Sei $(X_n)_{n \geq 0}$ eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum S. Zeigen Sie, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}$, $s_0, \dots, s_{n+m} \in S$ gilt:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(x_0 = s_0, \dots X_{n-1} = s_{n-1}; X_{n+1} = s_{n+1} \dots, X_{n+m} = s_{n+m} \mid X_n = s_n) \\ = \quad & \mathbb{P}(X_0 = s_0, \dots X_{n-1} = s_{n-1} \mid X_n = s_n) \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1}, \dots X_{n+m} = s_{n+m} \mid X_n = s_n). \end{aligned}$$

(4)

Abgabe: Dienstag, 19.12.00 vor der Übung