HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
BEREICH STOCHASTIK
PROF. IMKELLER

Blatt 9
WiSe 00/01

Übungen zur Einführung in die Stochastik

Aufgabe 38. Sei $(X_i)_{0\leq i\leq N}$ eine homogene Markovkette mit Übergangsmatrix P. Zeigen Sie, daß auch die umgekehrte Folge $(X_N,\ldots,X_0)$ eine Markovkette ist. Ist die umgekehrte Kette automatisch auch homogen? (4)

Aufgabe 39. Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Skizzieren Sie das Übergangsdiagramm dieser Kette und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen. (4)

Aufgabe 40./41.

a) Sei $P\in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine stochastische Matrix (d.h. es ist stets $\sum_{j=1}^m P_{i,j}=1$ und $P_{i,j}\geq 0$) mit strikt positiven Einträgen. Ferner sei $M=\{\mu\in[0,1]^m \mid \sum_{i=1}^m \mu_i = 1\}$ (wobei die Elemente von M als Zeilenvektoren aufgefaßt werden). Die Funktion $h: M\to\mathbb{R}$ sei definiert durch $h(\mu)=\max\limits_{1\leq i\leq m}\dfrac{\mu_i}{(\mu P)_i}$. Ferner sei $\gamma=\inf\{h(\mu)\mid \mu\in M\}$. Zeigen Sie:

(i) Es existiert ein $\mu\in M$ mit $\gamma\mu P=\mu$. (Hinweis: h nimmt in M sein Minimum an).

(ii) P besitzt eine invariante Verteilung, d.h. es existiert ein $\mu\in M$ mit $\mu P=\mu$.

b) Zeigen Sie mittels a), daß jede stochastische Matrix $P\in\mathbb{R}^{m\times m}$ eine invariante Verteilung besitzt. (Hinweis: Approximieren Sie P durch stochastische Matrizen Q^n mit strikt poitiven Einträgen und verwenden Sie ein Teilfolgenargument.) (4)

Abgabe: Dienstag, 9.1.01 vor der Übung

Guten Rutsch in neue Jahr!