Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank

WS 2001

**Übungen zur Vorlesung**
# Stochastische Analysis

## Serie 1

1) Zeige:

   (i) Ist $X = (X^1, \dots, X^d)$ eine $d$-dimensionale Brownsche Bewegung, so ist für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^d$ mit euklidischer Norm $\|x\| = 1$ der Prozeß

   $$B(t) := x^* X(t) = \sum_{i=1}^{d} x_i X_i(t) \quad (t \geq 0)$$

   eine eindimensionale Brownsche Bewegung.

   (ii) Die Umkehrung dieser Aussage ist falsch.
   *Hinweis:* Betrachte $X(t) := (B_{2t/3} - W_{t/3}, W_{2t/3} + B_{t/3})$ $(t \geq 0)$ für zwei unabhängige Brownsche Bewegungen $B$, $W$.

2) Zu einer Brownschen Bewegung $B$ und $\lambda \in (0, +\infty)$ definieren wir den Prozeß

   $$X_t := e^{-\lambda t} B_{\exp(2\lambda t)} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

   (i) Zeige, daß $X$ ein zentrierter, stationärer Gaußprozeß ist, und berechne seine Kovarianzfunktion.
   *Bemerkung:* $X$ ist ein sog. Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß.

   (ii) Im Falle $\lambda := 1/2$ beweise man, daß auch

   $$\beta_t := \begin{cases} X_t + \frac{1}{2}\int_0^t X_u \, du, & t \geq 0, \\ X_t - \frac{1}{2}\int_0^t X_u \, du, & t < 0, \end{cases}$$

   ein Gaußscher Prozeß ist, und berechne seine Kovarianzfunktion.

3) Beweise, daß fast alle Pfade einer Brownschen Bewegung nirgends Lipschitz-stetig sind.
   *Bemerkung:* Hieraus folgt insbesondere, daß Brownsche Pfade nirgendwo differenzierbar sind.

*Anleitung:*

(i) Für $K > 0$, $n \geq 2$ zeige, daß das Ereignis

$$A_n := \{\exists s \in [0,1] \text{ mit } |B_t - B_s| \leq K|t-s| \text{ für alle } t \text{ mit } |t-s| \leq 3/n\}$$

im Ereignis

$$\bigcup_{k=2}^{n} \left\{ |B_{j/n} - B_{(j-1)/n}| \leq \frac{6K}{n} \text{ für } j = k-1, k, k+1 \right\}$$

enthalten ist.

(ii) Zeige, daß $\mathbb{P}[A_n] \leq \text{const.}\, n^{-1/2}$ für eine nur von $K$ abhängige Konstante.

(iii) Für $n \uparrow +\infty$ und dann $K \uparrow +\infty$ folgt damit die Behauptung?!

4) Beweise, daß die Pfade der Brownschen Bewegung $B$ fast sicher nach oben und unten unbeschränkt sind:

$$\mathbb{P}\left[\sup_{t\geq 0} B_t = +\infty,\ \inf_{t \geq 0} B_t = -\infty\right] = 1\,.$$

*Bemerkung:* Hieraus folgt insbesondere, daß die eindimensionale (!) Brownsche Bewegung rekurrent ist, also unendlich oft zu einem beliebig vorgegebenen Punkt in $\mathbb{R}$ zurückkehrt.

*Hinweis:* Nutze die Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung, um zu zeigen, daß $X := \sup_{t\geq 0} B_t =_d c \sup_{t \geq 0} B_t$ für alle $c > 0$. Es folgt $\mathbb{P}[X = 0 \text{ oder } X = +\infty] = 1$. Damit sind f.s. die nach oben beschränkten Pfade der Brownschen Bewegung identisch mit denen, die unterhalb der Nulllinie verlaufen?! Insbesondere genügt es also, $\mathbb{P}[X = 0] = 0$ zu zeigen. Verwende dazu die Abschätzung

$$\mathbb{P}[X = 0] \leq \mathbb{P}[B_1 \leq 0 \text{ und } B_t - B_1\ (t \geq 1) \text{ nach oben beschränkt }]$$

und die Eigenschaften der Brownschen Bewegung.