Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank WS 2001

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 2

1) Einen "klassischen" Integrator könnte man als eine stetige Funktion $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ definieren, die folgende Eigenschaft besitzt: Für jedes $h \in C[0,1]$ und jede Folge von Partitionen $\tau^n = \{0 = t_0^n < \ldots < t_{k_n}^n = 1\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $\|\tau^n\| = \max_{1 \leq i \leq k_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \to 0$ $(n \uparrow +\infty)$ konvergiert die Folge der Riemann-Summen

$$\sum_{i=1}^{k_n} h(t_{i-1}^n) \left(F(t_i^n) - F(t_{i-1}^n)\right)$$

in $\mathbb{R}$.

(i) Zeige, daß in diesem Sinne "klassische" Integratoren von beschränkter Variation sind.
Hinweis: Verwende den
Satz von Banach–Steinhaus *Jede punktweise beschränkte Familie beschränkter linearer Operatoren* $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ *zwischen zwei Banachräumen* X *und* Y *ist sogar normbeschränkt:*

$$\sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha x\| < +\infty \text{ für alle } x \in X \quad \Rightarrow \quad \sup_{\alpha \in A} \|T_\alpha\| < +\infty\,.$$

(ii) Was bedeutet diese Beobachtung für die Pfade der Brownschen Bewegung?

2) Es bezeichne X die geometrische Brownsche Bewegung

$$X_t = x_0 \exp\left(\sigma W_t + \alpha t\right) \quad (t \geq 0)$$

mit Start in $x_0 > 0$.

(i) Berechne sämtliche Momente $\mathbb{E}[X_t^p]$ $(t \geq 0, p \in \mathbb{R})$.
(ii) Für welche Parameterwerte σ, α ist X ein Martingal?
(iii) Seien $H_n(t,x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die durch

$$\exp\left(\sigma x - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sigma^n}{n!} H_n(t,x) \quad (t, x \in \mathbb{R})$$

definierten Hermite-Polynome.
Zeige, daß für jedes $n = 0, 1, \ldots$ der Prozeß $H_n(t, W_t)$ $(t \geq 0)$ ein Martingal ist. (*Hinweis:* Koeffizientenvergleich)

3) Für eine Brownsche Bewegung $X = (X_t)_{t\geq 0}$ ist

$$\hat{\mathcal{F}} := \bigcap_{t\geq 0} \sigma(X_s,\ s \geq t)$$

die σ–Algebra der in der fernen Zukunft beobachtbaren Ereignisse ('tail field'). Beweise das folgende 0-1-Gesetz:

$$\text{Für jedes } A \in \hat{\mathcal{F}} \text{ gilt } \mathbb{P}[A] \in \{0,1\}\,.$$

Hinweis: Verwende die Rechtsstetigkeit vervollständigter Brownscher Filtrationen.

4) Nutze den Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale, um das starke Gesetz der großen Zahlen zu beweisen:

$$X_i \in L^1(\mathbb{P})\ (i = 1, 2, \ldots) \text{ i.i.d. } \Rightarrow \frac{1}{n} S_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{E}X_0 \text{ fast sicher für } n \uparrow +\infty\,.$$

Hinweis: Berechne $\mathbb{E}[\,X_0 \mid S_n, S_{n+1}, \ldots]$, dann Kolmogorovs 0-1-Gesetz ...