Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank WS 2001

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 3

1) **(Doppelaufgabe)** Beweise das Gesetz der großen Zahlen

$$\exists \quad \lim_{t\uparrow+\infty} \frac{B_t}{t} = 0 \quad \text{fast sicher}$$

für eine Brownsche Bewegung B auf zwei Arten:

(i) Zeige, daß für jede Konstante $\mu > 0$ der Prozeß $B_t - \mu t$ $(t \geq 0)$ fast sicher gegen $-\infty$ strebt, wenn $t \uparrow +\infty$. Hieraus folgt $\limsup_{t\uparrow+\infty} B_t/t \leq 0$ fast sicher (?!), und dies liefert die Behauptung aus Symmetriegründen.

Hinweis: Betrachte $M_t = \exp\left(2\mu(B_t - \mu t)\right)$ $(t \geq 0)$ und verwende den Martingalkonvergenzsatz und Aufgabe 4) von Serie 1, um einen Widerspruchsbeweis zu führen.

(ii) Nutze Tschebyscheffs Ungleichung und dann Doobs Maximalungleichung, um für $\varepsilon > 0$ und $n = 1, 2, \ldots$ die Abschätzung

$$\mathbb{P}\left[\sup_{2^n \leq t \leq 2^{n+1}} \left|\frac{W_t}{t}\right| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\text{const.}}{\varepsilon^2 2^n}$$

zu beweisen. Leite hieraus die Behauptung durch ein Borel-Cantelli-Argument ab.

2) Sei $M = (M_t)_{t\geq 0}$ ein nichtnegatives, stetiges Martingal, das für $t \uparrow +\infty$ gegen Null konvergiert. Setze $M^* := \sup_{t\geq 0} M_t$ und zeige:

(i) Für $x > 0$ gilt
$$\mathbb{P}\left[M^* \geq x \,|\, \mathcal{F}_0\right] = 1 \wedge (M_0/x) \ .$$
Hinweis: Betrachte $T^x := \inf\{t \geq 0 \mid M_t \geq x\}$.

(ii) Allgemeiner gilt für $\mathcal{F}_0$-meßbares $X \geq 0$:

$$\mathbb{P}\left[M^* \geq X \,|\, \mathcal{F}_0\right] = 1 \wedge (M_0/X) \ ,$$

d.h. M_0 ist die größte $\mathcal{F}_0$-meßbare Zufallsvariable, die kleiner als M^* ist.

3) Nutze Aufgabe 2), um die Verteilungsfunktion der folgenden Zufallsvariablen zu bestimmen:

(i) Das Maximum einer in $a > 0$ startenden Brownschen Bewegung bis zu ihrem ersten Besuch in 0.

(ii) Das gesamte Maximum einer in 0 startenden Brownschen Bewegung mit negativer Drift $-\mu < 0$.

Hinweis: Betrachte $M_t = \exp(2\mu(B_t - \mu t))$ $(t \geq 0)$.

Bemerkung: Für $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ und eine Standard-Brownsche Bewegung B heißt der Prozeß $bB_t + at$ $(t \geq 0)$ *Brownsche Bewegung mit Drift a und Volatilität b.*