Prof. Dr. Peter Imkeller WS 2001
Dr. Peter Bank

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 10

1) Der Black-Scholes Preis einer Call-Option mit Ausübungspreis c und Fälligkeit $T > 0$ ist im Zeitpunkt $t \in [0,T)$ bei Aktienpreis $x > 0$ durch

$$V(x,t) = x\Phi(d_+(x,t)) - ce^{-r(T-t)}\Phi(d_-(x,t))$$

gegeben (vgl. Vorlesung). Hierbei bezeichnet $r \in \mathbb{R}$ die risikolose Zinsrate und $\sigma > 0$ die Volatilität der Aktie; die Funktionen d_+ und d_- sind durch

$$d_\pm(x,t) = \frac{\log \frac{x}{c} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

definiert.

Man berechne die sogenannten 'Greeks':

(i) "Delta" $:= \frac{\partial}{\partial x}V(x,t)$,
(ii) "Gamma" $:= \frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,t)$,
(iii) "Theta" $:= \frac{\partial}{\partial t}V(x,t)$.

Wie lassen sich diese Größen ökonomisch interpretieren?

[3+3+3+3 Punkte]

2) Es seien S und P drei strikt positive Itô-Prozesse, die wir als Modell zur Beschreibung der Kursentwicklung zweier Wertpapiere interpretieren wollen. Ferner mögen die produktmeßbaren, adaptierten, beschränkten Prozesse ξ und η eine Anlagestrategie (in Stücken) für S und P beschreiben.

Beweise die Äquivalenz der folgenden Bedingungen:

(i) Die Strategie (ξ, η) ist selbstfinanzierend, d.h., der Wertprozeß $V_t = \xi_t S_t + \eta_t P_t$ ist ein Itô-Prozeß mit Dynamik

$$dV_t = \xi_t\, dS_t + \eta_t\, dP_t\,.$$

(ii) Der in Einheiten von P angegebene Wertprozeß $V_t/P_t = \xi_t(S_t/P_t) + \eta_t$ ist ein Itô-Prozeß mit Dynamik

$$d\left(\frac{V}{P}\right)_t = \xi_t\, d\left(\frac{S}{P}\right)_t \quad (t \geq 0)\,.$$

[12 Punkte]

3) **Doppelaufgabe** Wir modellieren die Wertenwicklung mehrer Wertpapiere als d-dimensionalen Itô-Prozeß $S = (S^{(1)}, \ldots, S^{(d)})$ mit

$$S_0 = s_0, \quad dS_t = \operatorname{diag}(S_t)(m\,dt + \sigma\,dW_t) \quad (t \geq 0)\,,$$

wobei $s_0 \in (0, +\infty)^d$ die Startpreise angibt und $m \in \mathbb{R}^d$ bzw. $\sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ Drift bzw. Volatilität der Wertpapiere beschreibe. Der risikolose Zinssatz liege bei $r \in \mathbb{R}$. Ferner bezeichne $\pi_t^{(i)}$ $(t \geq 0)$ einen produktmeßbaren, adaptierten Prozeß mit

$$\int_0^t (\pi_s^{(i)})^2\,ds < +\infty \quad \text{für alle } t \geq 0 \text{ fast sicher,}$$

der *prozentual* angibt, welchen Anteil seines Gesamtvermögens ein Investor zu jedem Zeitpunkt in das Papier $S^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$, investiert hat.

(i) Beschreibe die Dynamik der Wertentwicklung $X^{x,\pi}$ einer durch π beschriebenen selbstfinanzierenden Portfoliostrategie bei Anfangskapital $x > 0$ als lineare stochastische Differentialgleichung in den Differentialen $dW_t^{(i)}$, dt.

Bemerkung: Offenbar ist $1 - \sum_i \pi^{(i)}$ der in das risikolose Wertpapier zu investierende Vermögensanteil, wenn die Gesamtstrategie selbstfinanzierend sein soll.

(ii) Kann $X^{x,\pi}$ den Wert 0 annehmen oder gar unterschreiten?

(iii) Betrachte den Spezialfall, in dem $d = 2$ Wertpapierpreisprozesse von derselben Brownschen Bewegung $W^{(1)}$ getrieben werden:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{11}, \sigma_{21} \neq 0\,.$$

Wie muß man $\pi^{(2)}$ zu vorgegebenen $\pi^{(1)}$ wählen, damit die zugehörige selbstfinanzierenden Strategie einen Wertprozeß $X^{x,\pi}$ mit Dynamik

$$dX_t^{x,\pi} = X_t \mu_t\,dt$$

für einen geeigneten skalaren Prozeß μ_t folgt?

(iv) Aus ökonomischen Gründen (Arbitragefreiheit des Finanzmarktes) muß in einem 'sinnvollen' Modell der Prozeß μ aus (iii) mit der risikolosen Zinsrate r zusammenfallen: $\mu \equiv r$. Was impliziert das für die Quotienten $(m^{(i)} - r)/\sigma_{i1}$ $(i = 1, 2)$?

[6+6+6+6 Punkte]