Prof. Dr. Peter Imkeller WS 2001
Dr. Peter Bank

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 11

1) (i) Auf einem offenen, beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$ betrachte wir das sogenannte Poisson-Problem

$$\frac{1}{2}\Delta u = -g \quad \text{auf } D, \quad u = f \quad \text{auf } \partial D$$

mit stetigen, beschränkten Funktionen $g : D \to \mathbb{R}$, $f : \partial D \to \mathbb{R}$.
Zeige: Ist $u \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ eine Lösung dieses Problems, so gilt

$$u(x) = \mathbb{E}_x[f(W_{T_D}) + \int_0^{T_D} g(W_s)\, ds] \quad (x \in D),$$

wobei W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung mit $\mathbb{P}_x[W_0 = x] = 1$ ist und

$$T_D := \inf\{t \geq 0 \mid W_t \notin D\}$$

ihre Austrittszeit aus dem Gebiet D bezeichnet.
Hinweis: Wie muß man den absolutstetigen Prozeß A wählen, damit $u(W^{T_D}) + A$ ein Martingal wird?

(ii) Nutze (i), um für $D = B_r$, die d-dimensionale Kugel um 0 mit Radius r, die mittlere Austrittszeit bei Start in $x \in B_r$ zu

$$\mathbb{E}_x[T_{B_r}] = \frac{r^2 - \|x\|^2}{d}$$

zu berechnen.

[9+3 Punkte]

2) Auf einem offenen, beschränkten Gebiet $D \subset \mathbb{R}^d$ betrachte wir die partielle Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\Delta u + Vu = 0 \quad \text{auf } D, \quad u = f \quad \text{auf } \partial D\,,$$

wobei V eine stetige, beschränkte Funktion auf D bezeichne.

Für Lösungen $u \in C^0(\bar{D}) \cap C^2(D)$ leite man eine stochastische Darstellung wie in Aufgabe 1(i) her.

Hinweis: Wie muß man den absolutstetigen Prozeß A wählen, damit $u(W^{\tau_D})A$ ein Martingal wird?

[12 Punkte]

3) In dieser **Doppelaufgabe** geben wir einen probabilistischen Beweis zum

Satz von Tychonov *Auf* $D := (0,T] \times \mathbb{R}$ *sei* $u \in C^{1,2}$ *Lösung zur Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

und genüge ferner der Randbedingung

$$\lim_{t \downarrow 0,\, y \to x} u(t,y) = 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathbb{R}$$

sowie der Beschränktheitsbedingung

$$\sup_{0<t\leq T} |u(t,x)| \leq K e^{\alpha x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

für geeignete Konstanten $K, \alpha > 0$. *Dann ist* $u \equiv 0$ *auf* D.

Für den Beweis betrachten wir eine Brownsche Bewegung X mit Start in x unter $\mathbb{P}_x$ $(x \in \mathbb{R}^d)$ und verfahren wie folgt:

(i) Für $(x,t) \in D$ gilt

$$u(x,t) = \mathbb{E}_x\left[u\left(X_s, T-t-s\right); R_n > s\right] + \mathbb{E}_x\left[u\left(X_{R_n}, T-t-R_n\right); R_n \leq s\right] ,$$

wobei $s \in [0, T-t)$ und $n > |x|$ beliebig ist und

$$R_n := \inf\{u \geq 0 \mid |X_u| > n\}$$

gesetzt sei.

(ii) Der erste Summand in (i) strebt für $s \uparrow T-t$ gegen 0, der zweite gegen

$$\mathbb{E}_x\left[u\left(X_{R_n}, T-t-R_n\right); R_n \leq T-t\right] .$$

(iii) Also reicht es zum Beweis unserer Behauptung zu zeigen, daß der Ausdruck in (ii) für $n \uparrow +\infty$ gegen 0 konvergiert!? Und dies folgt schon, falls $\mathbb{P}^x[R_n < T - t]e^{an^2} \to 0$ für $n \uparrow +\infty$, womit sich der Beweis auf eine geeignete Abschätzung von $\mathbb{P}^x[R_n < T-t]$ für große n reduziert.

Nutze dazu nun einerseits, daß ohne Beschränkung $T > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, und andererseits die (als bekannt vorauszusetzende) Gleichung bzw. Abschätzung

$$P^0[T_y < T-t] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{y/\sqrt{T-t}}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx \leq \frac{e^{-y^2/2(T-t)}}{y/\sqrt{T-t}}$$

für die Passierzeiten

$$T_y := \inf\{t \geq 0 \mid X_t \geq y\} \quad (y > 0)$$

der Brownschen Bewegung.

[6+6+12 Punkte]