Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank

WS 2001

Übungen zur Vorlesung

Stochastische Analysis

Serie 12

1) Berechne die Itô-Darstellung zu folgenden Funktionalen einer Brownschen Bewegung $W = (W_t)_{0 \le t \le T}$:

   (i) W_T^2,

   (ii) $\int_0^T W_t^2 \, dt$,

   (iii) $\int_0^T e^{\sigma W_t + \mu t} \, dt$ mit $\sigma, \mu \in \mathbb{R}$.

[2+5+5 Punkte]

2) Zeige: Ist W eine Brownsche Bewegung bzgl. der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}$ und bezeichnet $(\mathcal{F}_t^W)_{t \ge 0}$ die von W erzeugte Filtration, so gilt für jedes $\mathcal{F}_\infty^W$ meßbare $H \ge 0$ die Gleichung

$$\mathbb{E}\left[H \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}\left[H \mid \mathcal{F}_t^W \right] \quad (t \ge 0)\,.$$

[12 Punkte]

3) Beweise die folgende mehrdimensionale Variante von

   Itôs Darstellungssatz *Jedes quadratintegrierbare Funktional H einer d-dimensionalen Brownschen Bewegung W besitzt eine eindeutige Darstellung der Form*

$$H = \mathbb{E}[H] + \sum_{i=1}^{d} \int_0^{+\infty} \xi_s^i \, dW_s^i$$

   für ein progressiv meßbares ξ mit $\mathbb{E} \int_0^{+\infty} \|\xi\|^2 dt < +\infty$.

   Hinweis: Nutze die in der Vorlesung bewiesene 1-dimensionale Variante, um die Behauptung zunächst für H der Form $H = \prod_i F_i(W^i)$ mit beschränkten, meßbaren Funktionen $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu beweisen, und verwende dann ein Dichteargument.

[12 Punkte]

4) Beweise: Jedes an eine Brownsche Filtration adaptierte lokale Martingal hat eine stetige Version.

[12 Punkte]