Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank WS 2001

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 13

1) Sei B eine Brownsche Bewegung auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ zur Filtrierung $\mathcal{F}_t$ $(t \geq 0)$. Zeige, daß für jede fast sicher endliche Stoppzeit T der Prozeß
$$\tilde{B}_t := B_{T+t} - B_T \quad (t \geq 0)$$
eine Brownsche Bewegung bzgl. der Filtrierung $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{T+t}$ $(t \geq 0)$ ist. Insbesondere ist also $(\tilde{B}_t,\ t \geq 0)$ unabhängig von $\mathcal{G}_0 = \mathcal{F}_T$.

2) Zeige mit Hilfe von Aufgabe 1, daß sich die Verteilung des Maximums einer Brownschen Bewegung B auf endlichen Intervallen $[0, t]$ zu
$$\mathbb{P}[\max_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a] = 2\mathbb{P}[B_t \geq a] \quad (a > 0)$$
ergibt, und berechne daraus die Dichte
$$\mathbb{P}[T_a \in dt] = \frac{a}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) 1_{(0,+\infty)}(t)$$
der Passierzeit $T_a := \inf\{s \geq 0 \mid B_s \geq a\},\ a > 0$.

   Hinweis: Beschreibe das Ereignis $\{\max_{0 \leq s \leq t} B_s \geq a,\ B_t < a\}$ mit Hilfe der Passierzeit T_a und des Prozesses $(B_{T_a+s} - B_{T_a})_{s \geq 0}$ ...

3) Beweise den

   Satz von Reuter *Der Zeitpunkt, in dem eine Brownsche Bewegung mit Drift und Start in 0 aus einer Kugel um 0 austritt, ist unabhängig vom Ort, wo dies geschieht.*

   Hinweis: Aus Aufgabe 4(ii), Serie 8, folgt schon, daß die Behauptung für die Brownsche Bewegung ohne Drift richtig ist!?

4) Sei $\mathbb{P}^*$ ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß und $\mathbb{P}$ das Wienermaß auf dem Pfadraum $(C[0, +\infty), \mathcal{B}(C[0, +\infty)))$. Es bezeichne W den Koordinatenprozeß.

   Zeige: Es ist $\mathbb{P}^*$ äquivalent zu $\mathbb{P}$ genau dann, wenn es einen $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$-progressiv meßbaren Prozeß ξ mit $\int_0^{+\infty} \xi_t^2\, dt < +\infty$ fast sicher gibt, so daß
$$\mathbb{P}^*[A] = \mathbb{E}\left[1_A \exp\left(\int_0^{+\infty} \xi_t\, dW_t - \frac{1}{2}\xi_t^2\, dt\right)\right] \quad \text{für alle} \quad A \in \mathcal{B}(C[0, +\infty))\,.$$

   Hinweis: s. Serie 9, Aufgabe 4!