Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank WS 2001

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 4

1) Für eine Brownsche Bewegung B berechne die Varianz von

$$\int_0^t |B_s|^p \, dB_s \quad \text{und} \quad \int_0^t (B_s + s)^2 \, dB_s \quad (t, p \geq 0)\,.$$

2) Für eine Brownsche Bewegung B und $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ definiere

$$Z_t := \int_0^t f(s)\, dB_s \quad \text{und} \quad \mathcal{E}(Z)_t := \exp\left(\int_0^t f(s)\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)^2\, ds\right) \quad (t \geq 0)\,.$$

Man zeige, daß $\mathcal{E}(Z)$ ein Martingal ist (bzgl. der Standardfiltrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ zu B).

Hinweis: Die Behauptung ist äquivalent dazu, daß $Z_t - Z_s$ für $s \leq t$ von $(\mathcal{F}_s)$ unabhängig und $N(0, \int_s^t f(u)^2\, du)$-verteilt ist?! Beweise letzteres zunächst für einfache $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

3) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein Prozeß $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißt *progressiv meßbar*, falls für jedes $t \geq 0$ die Einschränkung $X|_{\Omega\times[0,t]}$ $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-meßbar ist.

Zeige: Ist X progressiv meßbar und T eine Stoppzeit, so ist

(i) die Zufallsvariable $X_T(\omega) := X(\omega, T(\omega))1_{\{T<+\infty\}}(\omega)$ $\mathcal{F}_T$-meßbar und

(ii) der gestoppte Prozeß $X^T := (X_{T\wedge t})_{t\geq 0}$ wieder progressiv meßbar.

4) Sei $(B_t,\ t \geq 0)$ eine Brownsche Bewegung bzgl. der Filtrierung $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$.

(i) Beweise die Waldschen Identitäten

$$\mathbb{E}B_T = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}B_T^2 = \mathbb{E}T$$

für alle Stoppzeiten T *mit endlicher Erwartung* $\mathbb{E}T < +\infty$.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß für die Gültigkeit dieser Waldschen Identitäten sogar schon die schwächere Bedingung $\mathbb{E}\sqrt{T} < +\infty$ genügt.

(ii) Man gebe eine fast sicher endliche Stoppzeit T^* an, für die diese Identitäten nicht gelten.