Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank WS 2001

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 5

1) Beweise, daß der zu einer vervollständigten, rechtsstetigen Filtration gehörige Raum $\mathcal{M}_c^2$ der quadrat-integrierbaren, Martingale mit fast sicher stetigen Pfaden vollständig ist bezüglich der Norm $\|M\| := \mathbb{E}[M_T^2]^{1/2}$.

[12 Punkte]

2) Ein stochastischer Prozeß $M = (M_t)_{t\geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ heißt *lokales Martingal*, falls es eine fast sicher gegen $+\infty$ wachsende Folge von Stoppzeiten $T^1 \leq T^2 \leq \ldots$ gibt, so daß jeder der gestoppten Prozesse $M^{T_n} = (M_{T_n \wedge t})_{t\geq 0}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein Martingal ist.

   Für lokale Martingale M und N zeige man:

   (i) Der in einer Stoppzeit T gestoppte Prozeß $M^T = (M_{T\wedge t})$ $(t \geq 0)$ ist ein lokales Martingal.

   (ii) Auch $M + N$ ist ein lokales Martingal.

   (iii) M ist ein 'echtes' Martingal genau dann, wenn M 'von der Klasse (DL)' ist, d.h., wenn für jedes $a > 0$ die Familie von Zufallsvariablen $(M(T),\ T \leq a$ eine Stoppzeit) gleichgradig integrierbar ist.

[3+3+6 Punkte]

3) Sei $\tau^n = \{0 = t_0^n < \ldots < t_{k_n}^n = T\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[0, T]$ mit $\|\tau^n\| \to 0$. Man zeige:

   (i) Ist $A : [0, T] \to \mathbb{R}$ stetig und von beschränkter Variation, so gilt

$$\sum_{t_i^n \in \tau^n,\, t_i^n < T} A_{\theta_i^n}(A_{t_{i+1}^n} - A_{t_i^n}) \to \frac{1}{2} A_T^2\,,$$

   für jede beliebige Wahl der Zwischenstellen $\theta_i^n \in [t_i^n, t_{i+1}^n]$ $(n = 1, 2, \ldots, i = 0, \ldots, k_n - 1)$.

   (ii) Für eine Brownsche Bewegung B und $\lambda \in [0, 1]$ konvergiert sowohl

$$S_\lambda^n := \sum_{t_i^n \in \tau^n,\, t_i^n < T} (\lambda B_{t_i} + (1-\lambda) B_{t_{i+1}})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

als auch

$$\bar{S}^n_\lambda := \sum_{t_i^n \in \tau^n,\, t_i^n < T} B_{\lambda t_i + (1-\lambda) t_{i+1}} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

in L^2 gegen

$$\frac{1}{2} B_T^2 + \left(\frac{1}{2} - \lambda\right) T\,.$$

(iii) Für welche(s) λ ist $\frac{1}{2}B_t^2 + (\frac{1}{2} - \lambda)t$ $(t \geq 0)$ ein Martingal?

[3+8+1 Punkte]

4) Sei H ein adaptierter, rechtsstetiger und beschränkter Prozeß mit Werten in $\mathbb{R}$ und B eine Brownsche Bewegung. Beweise die Konvergenz

$$\frac{1}{B_t} \int_0^t H_s\, dB_s \to H_0 \quad \text{stochastisch für} \quad t \downarrow 0\,.$$

Hinweis: Wende die Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $\left| \frac{1}{B_t} \int_0^t (H_s - H_0)\, dB_s \right|^{1/4}$ an, nutze dann die Jensen'sche Ungleichung $(\mathbb{E}[|X|])^4 \leq \mathbb{E}[|X|^4]$, um schließlich die Ito-Isometrie einsetzen zu können.

[12 Punkte]