Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank WS 2001

Übungen zur Vorlesung

Stochastische Analysis

Serie 6

1) Sei B eine Brownsche Bewegung und $X \geq 0$ eine von B unabhängige Zufallsvariable. Zeige, daß der Prozeß $M_t := B_{tX}$ $(t \geq 0)$ bzgl. der von ihm erzeugten vollständigen und rechtsstetigen Filtrierung $(\mathcal{F}_t^M,\ t \geq 0)$ immer ein lokales Martingal ist. Gilt zudem noch $\mathbb{E}X^{1/2} < +\infty$, so ist M sogar ein echtes Martingal.

   [12 Punkte]

2) Es bezeichne $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ die Menge der (nicht notwendig stetigen) lokalen Martingale auf dem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

   Zeige: $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ ist stabil bzgl. weiterer Lokalisierung, d.h., es gilt $\mathcal{M}_{\text{loc}} = (\mathcal{M}_{\text{loc}})_{\text{loc}}$, wobei $(\mathcal{M}_{\text{loc}})_{\text{loc}}$ die Menge aller stochastischen Prozesse $M : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bezeichne, für die eine gegen $+\infty$ wachsende Folge von Stoppzeiten $T_1 \leq T_2 \leq \ldots$ existiert, so daß jeder der gestoppten Prozesse M^{T_n} $(n = 1, 2, \ldots)$ in $\mathcal{M}_{\text{loc}}$ liegt.

   [12 Punkte]

3) Das exakte Wachstumsverhalten einer Brownschen Bewegung B in 0 bzw. $+\infty$ beschreibt der sogenannte

   Satz vom iterierten Logarithmus *Fast sicher gilt*

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}} = 1 \quad \textit{und} \quad \limsup_{t\uparrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1\,.$$

   Wir wollen im folgenden Teile dieses Satzes beweisen.

   (i) Zeige, daß sich jede dieser beiden Wachstumsbeschreibungen aus der anderen herleiten läßt.

   (ii) Für $\alpha, \beta, t > 0$ beweise man die Abschätzung

$$\mathbb{P}\left[\sup_{s\leq t}\{B_s - \tfrac{1}{2}\alpha s\} > \beta\right] \leq e^{-\alpha\beta}\,.$$

   Hinweis: Betrachte das Martingal $\exp(\alpha B_s - \frac{1}{2}\alpha s)$ $(s \geq 0)$.

   (iii) Setze $h(t) := \sqrt{2t\log\log(1/t)}$ und für $\theta, \delta \in (0,1)$ betrachte die Folgen

$$t_n := \theta^n, \quad \alpha_n := (1+\delta)h(t_n)/t_n \quad \text{und} \quad \beta_n := h(t_n)/2 \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Zeige, daß fast sicher für jedes hinreichend große n die Ungleichung

$$\sup_{s \le t_n} \{B_s - \tfrac{1}{2}\alpha_n s\} \le \beta_n$$

richtig ist.

Hinweis: Nutze (i) für ein Borel-Cantelli-Argument.

(iv) Folgere hieraus, daß fast sicher für hinreichend große n die Abschätzung

$$B_t \le \frac{1}{2}\theta^{-1/2}(2+\delta)h(t) \quad \text{für alle} \quad t \in [t_{n+1}, t_n]$$

gilt.

Hinweis: Für $t \in [t_{n+1}, t_n]$ gilt $h(t_n) \le \theta^{-1/2} h(t)$?!

(v) Beweise

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{h(t)} \le 1 \quad \text{fast sicher.}$$

[3+3+2+2+2 Punkte]

4) Sei B eine Brownsche Bewegung und $\beta, T \in (0, +\infty)$.

(i) Zeige mit Hilfe einer Zeittransformation die Gleichheit in Verteilung

$$\max_{0 \le t \le T} \left\{ e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta u}\, dB_u \right\} =_d \max_{0 \le s \le \frac{e^{2\beta T}-1}{2\beta}} \frac{B_s}{\sqrt{1+2\beta s}}\,.$$

(ii) Nutze den Satz vom iterierten Logarithmus, um zu zeigen, daß

$$\lim_{\beta \uparrow +\infty} \max_{0 \le s \le \frac{e^{2\beta T}-1}{2\beta}} \frac{B_s}{\sqrt{1+2\beta s}} = 0 \quad \text{fast sicher.}$$

(iii) Folgere, daß

$$\mathbb{P}\text{-} \lim_{\beta \uparrow +\infty} \max_{0 \le t \le T} \left\{ e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta u}\, dB_u \right\} = 0.$$

[6+4+2 Punkte]