Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank

WS 2001

Übungen zur Vorlesung

Stochastische Analysis

Serie 7

1) **(Doppelaufgabe)** Sei $B = (B^1, \ldots, B^d)$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung.

   (i) Für eine Zerlegungsfolge $\tau^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{k_n}^n = T\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von $[0, T]$ mit $\|\tau^n\| \to 0$ $(n \uparrow +\infty)$ beweise man die Konvergenzen
   $$\sum_{t_{k-1}^n \le t} \left(B_{t_k^n}^i - B_{t_{k-1}^n}^i\right)\left(B_{t_k^n}^j - B_{t_{k-1}^n}^j\right) \to \delta_{ij} t \quad \text{in } L^2 \quad (t \ge 0,\ i, j = 1, \ldots, d),$$
   wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ sonst.
   Hinweis: Polarisierung.

   (ii) Nutze (i), um analog zur Vorgehensweise der Vorlesung im eindimensionalen Fall nun die mehrdimensionale Itô-Formel zu beweisen: Für $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ gilt
   $$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t \nabla f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Delta f(B_s)\, ds \quad (t \ge 0)$$
   fast sicher.

[8+16 Punkte]

2) Seien wieder $H_n(t, x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die Hermite-Polynome aus Serie 2, Aufgabe 2. Zeige, daß jedes H_n Lösung der Wärmeleitungsgleichung
   $$\frac{\partial}{\partial t} H_n(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} H_n(t, x) = 0$$
   ist, und folgere daraus die Martingaleigenschaft für $H_n(t, W_t)$ $(t \ge 0)$ mit Hilfe der Itô-Formel.

[12 Punkte]

3) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion und (X, Y) eine zweidimensionale Brownsche Bewegung. Wir identifizieren (X, Y) mit $Z := X + iY$, der Brownschen Bewegung in der komplexen Ebene.

   (i) Zeige $f(Z)$ ist ein (komplexwertiges) lokales Martingal.
   Hinweis: Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen.

   (ii) Unter Benutzung der Kreisscheibenrekurrenz der zweidimensionalen Brownschen Bewegung (Vorl.) beweise man den
   Fundamentalsatz der Algebra *Jedes nichtkonstante Polynom $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.*

[4+8 Punkte]