Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank

WS 2001

Übungen zur Vorlesung

Stochastische Analysis

Serie 8

1) Sei

$$X_t = \int_0^t a_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dW_s \quad (t \geq 0)$$

ein Itô-Prozeß. Für welche Prozesse b ist dann $Y_t = \int_0^t b_s \, dX_s$ $(t \geq 0)$ erklärt? Berechne für diese b den Kovariationsprozeß $\langle X, Y \rangle$.

[4+8 Punkte]

2) Für $\mu, \delta \in \mathbb{R}$ und eine Brownsche Bewegung W zeige man, daß der Prozeß

$$X_t = \int_0^t \exp\left(\delta \left(W_t - W_s + \mu(t-s)\right) - \frac{1}{2}\delta^2(t-s)\right) ds \quad (t \geq 0)$$

der stochastischen Integralgleichung

$$X_t = \int_0^t (1 + \delta\mu X_s) \, ds + \delta \int_0^t X_s \, dW_s \quad (t \geq 0)$$

genügt.

[12 Punkte]

3) Nutze die Itô-Formel und die Brownsche Bewegung für einen Beweis zum

Satz von Liouville *Beschränkte harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ sind konstant.*

[12 Punkte]

4) Sei B_r die Kugel vom Radius $r > 0$ um $0 \in \mathbb{R}^d$.

(i) Zeige: Ist W eine Brownsche Bewegung im $\mathbb{R}^d$ mit Start in 0, so auch OW für jede orthonormale Matrix $O \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

(ii) Sei $\tau_{B_r} = \inf\{t \geq 0 \mid W_t \notin B_r\}$ die erste Austrittszeit der Brownschen Bewegung W aus der Kugel B_r. Zeige:

$$\mathbb{P}\left[W(\tau_{B_r}) \in dx\right] = \frac{\lambda_{\partial B_r}(dx)}{\Pi_r},$$

wobei $\lambda_{\partial B_r}$ das Lebesguesche Oberflächenmaß zur Kugel B_r und Π_r die Größe ihrer Oberfläche bezeichne.

(iii) Beweise mit Hilfe der Itô-Formel den

Mittelwertsatz für harmonische Funktionen *Ist u harmonisch auf der offenen Menge D, so besitzt u die Mittelwerteigenschaft:*

$$u(a) = \int_{\partial B_r} u(a+x)\,\lambda_{\partial B_r}(dx)$$

für alle $a \in D$, so daß $a + \bar{B}_r \subset D$.

[2+3+7 Punkte]