Prof. Dr. Peter Imkeller
Dr. Peter Bank

WS 2001

Übungen zur Vorlesung
Stochastische Analysis

Serie 9

1) Sei $W = (W_t^{(1)}, \ldots, W_t^{(d)})_{t\geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung und der Prozeß $X = (X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(d)})_{t\geq 0}$ Lösung der stochastischen Integralgleichung

$$X_t^{(i)} = x + \int_0^t b_i(X_s)\,ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_{ij}(X_s)\,dW_s^{(j)} \quad (t \geq 0,\ i = 1, \ldots, d)$$

mit $x \in \mathbb{R}^d$ und für stetige, beschränkte Funktionen $b_i, \sigma_{ij} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, d)$. Beweise die Existenz der folgenden Grenzwerte und berechne sie:

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}[X_t^{(i)} - x_i], \quad \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\mathbb{E}[(X_t^{(i)} - x_i)(X_t^{(j)} - x_j)] \quad (i, j = 1, \ldots, d)\,.$$

[12 Punkte]

2) Die geometrische Brownsche Bewegung

$$X_0 = x, \quad dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma X_t\,dB_t \quad (t \geq 0)$$

beschreibt die Preisfluktuationen einer Aktie im Black-Scholes Modell. Zur Schätzung des Volatilitätsparameters $\sigma \in [0, +\infty)$ aus diskreten Beobachtungen X_{kh} $(k = 0, 1, \ldots)$ werden oft die Aktienrenditen

$$R_k(h) = \frac{X_{kh}}{X_{(k-1)h}} - 1$$

über die sukzessiven Zeitperioden $[(k-1)h, kh]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ für ein (kleines) $h > 0$ herangezogen.

(i) Zeige, daß die $R_k(h)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ unabhängig und identisch verteilt sind und berechne ihren Erwartungswert sowie ihre Varianz.

(ii) Zeige, daß der Volatilitätsparameter σ der Gleichung

$$\sigma^2 = \frac{1}{h}\log\left(1 + \frac{\mathrm{var}[R_k(h)]}{(1 + \mathbb{E}[R_k(h)])^2}\right)$$

genügt.

(iii) Wie läßt sich damit σ schätzen, wenn man $R_1(h), \ldots, R_n(h)$ kennt?

[4+4+4 Punkte]

3) Betrachte die stochastische Differentialgleichung

$$X_0 = 0, \quad dX_t = -2\frac{X_t}{1-t}\,dt + \sqrt{2t(1-t)}\,dB_t \quad (0 \le t < 1)\,.$$

(i) Konstruiere die eindeutige (?!) Lösung dieser Gleichung explizit.

(ii) Zeige, daß es sich dabei um einen zentrierten Gauß-Prozeß mit Kovarianzfunktion

$$\operatorname{cov}(X_t, X_s) = (1 - t \vee s)^2 (t \wedge s)^2 \quad (s, t \in [0,1))$$

handelt.

[6+6 Punkte]

4) Für einen reellwertigen Itô-Prozeß X bezeichne $\mathcal{E}(X)$ die Lösung Z der linearen stochastischen Differentialgleichung

$$Z_0 = 1, \quad dZ_t = Z_t\,dX_t \quad (t \ge 0).$$

Beweise:

(i) Für X von der Form

$$X_t = x + \int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dW_s \quad (t \ge 0)$$

(mit geeigneten Prozessen a, b) ist

$$\mathcal{E}(X)_t = \exp\left(\int_0^t b_s\,dW_s + \int_0^t \left(a_s - \frac{1}{2}b_s^2\right)\,ds\right) \quad (t \ge 0)\,.$$

(ii) Es gilt die **Formel von Yor**:

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)\,.$$

(iii) Ist M ein Itô-Prozeß und zugleich ein lokales Martingal, so gilt bis auf eine Nullmenge, daß

$$\{\mathcal{E}(M)_{+\infty} = 0\} = \{\langle M\rangle_{+\infty} = +\infty\}\,.$$

Hinweis: Es ist $\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}(\frac{1}{2}M)^2 \exp(-\frac{1}{4}\langle M\rangle)$?!

[3+4+5 Punkte]