Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller, Dr. Peter Bank
Dierk Peithmann, Jan Johannes

Blatt 4
WS 2002/03

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 21. Berechne für eine Familie mit 5 Kindern die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

E_1: "Alle Kinder haben das gleiche Geschlecht."
E_2: "Die 3 ältesten Kinder sind Jungen und die übrigen Mädchen."
E_3: "Genau 3 Kinder sind Jungen."
E_4: "Die 2 ältesten Kinder sind Mädchen."
E_5: "Mindestens eines der Kinder ist ein Mädchen."

(Sie dürfen annehmen, dass die Geburt von Jungen und Mädchen gleichwahrscheinlich ist, und dass das Geschlecht eines jeden Neugeborenen unabhängig von dem der übrigen Geschwister ist.)

Aufgabe 22. Sie haben bei einem großen Fernsehquiz alle Kontrahenten ausgestochen und stehen nun vor der Wahl: sie stehen vor drei verschlossenen Türen und müssen sich für eine entscheiden. Hinter einer dieser Türen befindet sich der Hauptgewinn, ein Auto, während sich hinter jeder der anderen beiden Türen eine Niete verbirgt. Sie entscheiden sich für eine Tür. Daraufhin öffnet der Moderator diejenige der beiden übrigen Türen, hinter der sich eine Niete versteckt. (Falls er die Wahl hat, tut er dies "zufällig".) Sie haben nun die Möglichkeit, ihre Entscheidung nochmals zugunsten der anderen verschlossenen Tür zu ändern. Sollten Sie davon Gebrauch machen?

Aufgabe 23. Eine Münze, deren Wurf mit Wahrscheinlichkeit p Kopf ("K") und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ Zahl ("Z") ergibt, wird wiederholt geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten 4 Würfe "K,K,K,K" bzw. "Z,K,K,K" ergeben? Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Muster "Z,K,K,K" vor "K,K,K,K" auf?

Aufgabe 24. Zwei Spieler A und B werfen abwechselnd zwei Würfel, bis entweder A die Augensumme 9 oder B die Augensumme 6 wirft. Spieler A beginnt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass A den letzten Wurf macht.

Aufgabe 25. Es seien E_1, $E_2,\dots,E_n$ unabhängige Ereignisse. Zeige:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \bigl(1 - P(E_i)\bigr).$$

Aufgabe 26. Unabhängige Versuche, deren Ausgang mit Wahrscheinlichkeit p ein Erfolg und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ ein Mißerfolg ist, werden nacheinander ausgeführt. (Diese bezeichnet man als *Bernoulli-Versuche.*) Es sei P_n die Wahrscheinlichkeit, dass nach n Bernoulli-Versuchen die Anzahl der Erfolge gerade ist. Zeige:

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Beweise damit induktiv:

$$P_n = \tfrac{1}{2}\left(1 + (1-2p)^n\right).$$

Abgabe: Mittwoch, 13.11.2002 (Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.)