Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller, Dr. Peter Bank
Dierk Peithmann, Jan Johannes

Blatt 8
WS 2002/03

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 45. Die Anzahl der Erkältungen, an denen man jährlich erkrankt, sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 5$. Nun ist ein neues Wundermittel auf dem Markt, das den Verteilungsparameter für 75 Prozent der Bevölkerung auf $\lambda = 3$ reduziert. (Bei den übrigen 25 Prozent wirkt es nicht). Sie testen das Mittel ein Jahr lang und sind in diesem Zeitraum zweimal erkältet. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Mittel bei Ihnen wirkt?

Aufgabe 46. Aus einer Urne, die zu Anfang eine rote und eine blaue Kugel enthält, wird mit Zurücklegen gezogen. Bei jedem Zurücklegen wird eine weitere Kugel derselben Farbe hinzugefügt. Es bezeichne X die Nummer des ersten Zuges, bei dem eine blaue Kugel gezogen wird.

a) Zeige: $P(X > i) = \frac{1}{i+1}$, $i \geq 1$.

b) Zeige: $P(X < \infty) = 1$.

c) Berechne $E(X)$.

Aufgabe 47. Löse das Banachsche Streichholzproblem für den Fall, dass sich in den beiden Streichholzschachteln zu Anfang unterschiedliche Anzahlen von Streichhölzern befinden.

Aufgabe 48. Sei X eine negativ binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $r \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, und sei Y binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und (demselben) p. Zeige

$$P(X > n) = P(Y < r).$$

(Hinweis: Drücke die Ereignisse $\{X > n\}$, $\{Y < r\}$ mit Hilfe einer zugrunde liegenden Folge von unabhängigen Bernoulli-Versuchen aus.)

Aufgabe 49. Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeige:

$$P(X \in 2\mathbb{N}_0) = \tfrac{1}{2}[1 + e^{-2\lambda}].$$

(Hinweis: Mit Hilfe der Exponentialreihe erhält man eine Reihenentwicklung für $e^{-\lambda} + e^{\lambda}$.)

Aufgabe 50. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable. Zeige:

$$P(X = n + k | X > n) = P(X = k), \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Abgabe: Mittwoch, 11.12.2002 (Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.)