Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller, Dr. Peter Bank
Dierk Peithmann, Jan Johannes

Blatt 9
WS 2002/03

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 51. Sei X eine absolutstetig verteilte Zufallsvariable mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & \text{für } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimme die Konstante $c \in \mathbb{R}$.

b) Berechne die Verteilungsfunktion von X.

Aufgabe 52. Die Lebenszeit (in Stunden) einer elektronischen Röhre werde beschrieben durch eine absolutstetige Zufallsvariable X mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{für } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeige: $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$, d.h. f ist in der Tat eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

b) Bestimme die erwartete Lebenszeit $E(X)$ einer solchen Röhre.

Aufgabe 53. Aus dem Einheitsintervall wird zufällig ein Punkt gewählt.

a) Beschreibe dieses Experiment durch eine geeignete (absolutstetige) Zufallsvariable.

b) Durch den zufällig gewählten Punkt wird das Intervall in zwei Teilintervalle zerlegt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass das Verhältnis der Länge des kleineren zu der des größeren Teilintervalls kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Aufgabe 54. Zeige: Ist X eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsvariable, so gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_\lambda^\infty e^{-x} x^n \, dx.$$

(Hinweis: Partielle Integration.)

Aufgabe 55. Konstruiere eine Familie von Ereignissen $(E_a)_{a \in [0,1]}$, so dass $P(E_a) = 1$ für alle $a \in [0,1]$ gilt, aber $P\big(\bigcap_{a\in[0,1]} E_a\big) = 0$ ist.
(Hinweis: Die E_a können als Urbilder einer absolutstetig verteilten Zufallsvariablen gewählt werden.)

Aufgabe 56. Sei X eine absolutstetige, nichtnegative Zufallsvariable, und sei $n \in \mathbb{N}$, so dass $E(X^n)$ existiert. Zeige:

$$E(X^n) = \int_0^\infty n x^{n-1} P(X > x)\, dx.$$

Abgabe: Mittwoch, 18.12.2002 (Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.)