Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller, Dr. Peter Bank
Dierk Peithmann

Blatt 12
WS 2002/03

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 69. Ein Fernsehverkäufer weiß aus Erfahrung, dass 45% der Kunden einen gewöhnlichen Fernseher und 15% einen Plasma-Fernseher kaufen, während 40% sich nur in seinem Laden umsehen wollen.
An einem bestimmten Tag betreten 5 Kunden das Geschäft. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass an diesem Tag genau 2 gewöhnliche und ein Plasma-Fernseher verkauft werden?

Aufgabe 70. Die gemeinsame Massenfunktion der Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$$p(1,1) = \frac{1}{8} \qquad p(1,2) = \frac{1}{4}$$
$$p(2,1) = \frac{1}{8} \qquad p(2,2) = \frac{1}{2}$$

a) Berechne die bedingte Massenfunktion von X gegeben $Y = i$ für $i = 1, 2$.

b) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

c) Berechne $P(XY \leq 3)$, $P(X + Y > 2)$ und $P(X/Y > 1)$.

Aufgabe 71. Es seien X und Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, so dass X gleichverteilt auf $[0, 1]$ und Y exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1$ ist. Bestimme die Verteilung von

a) $Z = X + Y$,

b) $Z = X/Y$.

Aufgabe 72. Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen, d.h. für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ gelte

$$P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq x_n).$$

Ferner sei $Y_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, und jedes X_i sei diskret verteilt. Zeige, dass die Zufallsvariablen $Y_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängig sind.
(Hinweis: Bei diskret verteilten Zufallsvariablen genügt es, eine entsprechende Bedingung für die Massenfunktionen nachzuweisen. Beweise daher für jedes $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:
Für $y \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(Y_n = y, X_{n+1} = x_1, \ldots, X_{n+k} = x_k) = P(Y_n = y) \prod_{j=1}^{k} P(X_j = x_j).)$$

Aufgabe 73. Seien X und Y stochastisch unabhängige, exponentialverteilte Zufallsvariablen zum Parameter $\lambda > 0$. Bestimme die Verteilung von $\min(X, Y)$.

Aufgabe 74. Seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter p. Zeige, dass $X_1 + \cdots + X_n$ negativ binomialverteilt ist mit Parametern n und p.
(Hinweis: verwende Aufgabe 72.)

Abgabe: Mittwoch, 22.01.2003 (Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.)