Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller, Dr. Peter Bank
Dierk Peithmann

Blatt 13
WS 2002/03

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 75. Die Anzahl der Kunden, die täglich zur Mittagszeit zwischen 13.00 und 14.00 Uhr "Charlotte's Imbiß" aufsuchen, sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 10$. Berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Zeit höchstens drei Frauen den Imbiß betreten haben, wenn (an ein und demselben Tag) 10 Männer dort waren. Formuliere dazu geeignete Modellannahmen und begründe diese.

Aufgabe 76. Es werde zufällig eine Zahl X aus $\{1, \ldots, 5\}$ und dann zufällig eine weitere Zahl Y aus $\{1, \ldots, X\}$ gewählt.

a) Berechne die gemeinsame Massenfunktion von X und Y.

b) Berechne die bedingte Massenfunktion von X gegeben $Y = j$ $(j = 1, \ldots, 5)$.

c) Sind X und Y unabhängig? (Begründung!)

Aufgabe 77. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xe^{-x(y+1)}, & x, y > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechne die bedingten Dichten $f_{X|Y}$ und $f_{Y|X}$.

b) Bestimme die Dichte von $Z = XY$.

Aufgabe 78. Fließt ein Strom der Stärke I (gemessen in Ampère) durch einen Widerstand der Stärke R (gemessen in Ohm), so wird eine Leistung von $W = I^2 R$ Watt abgegeben. Es werde angenommen, dass I und R unabhängige Zufallsvariablen sind, mit zugehörigen Dichten:

$$f_I(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad f_R(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Dichte von W.

Aufgabe 79. Die Luftfeuchtigkeit an einem bestimmten Tag werde beschrieben durch eine gammaverteilte Zufallsvariable W mit Parametern (t, β), d.h. W hat die Dichte

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(t)} \beta e^{-\beta w} (\beta w)^{t-1}, & w > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter der Bedingung $W = w$ ist die Anzahl N der (Auto-)Unfälle während dieses Tages Poisson-verteilt mit Mittelwert w.
Zeige: Bedingt unter $N = n$ ist W gammaverteilt mit Parametern $(t + n, \beta + 1)$.
(Zur Erinnerung: Die Gamma-Funktion ist für $t > 0$ definiert durch $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$.)

Aufgabe 80. Sei U gleichverteilt auf $[0, 1]$, und sei $a \in (0, 1)$. Berechne die bedingte Verteilung von U unter der Bedingung

a) $U > a$,

b) $U < a$.

Abgabe: Mittwoch, 29.01.2003 (Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.)