

Übungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 81. Ein fairer Würfel wird n -mal geworfen. Es bezeichne X die Anzahl der dabei auftretenden Einsen und Y die Anzahl der Zweien. Berechne $\text{Cov}(X, Y)$.

Aufgabe 82. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y sei gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} \exp\left(-\left(y + \frac{x}{y}\right)\right), & x, y > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- a) Berechne $E(X)$ und $E(Y)$.
(Hinweis: Es ist schwierig, f_X zur Berechnung von $E(X)$ explizit zu bestimmen. Schreibe daher $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x}{y} e^{-y} e^{-x/y} dy dx$ und vertausche die Integrationsreihenfolge.)
- b) Zeige, dass $\text{Cov}(X, Y) = 1$ ist.
- c) Berechne $E[X^2 | Y = y]$.

Aufgabe 83. Es seien X und Y stochastisch unabhängige, auf $[0, 1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Zeige: Für $\alpha > 0$ ist

$$E(|X - Y|^\alpha) = \frac{2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}.$$

Aufgabe 84. Seien X und Y absolutstetig mit derselben Verteilung, so dass $E(X^2)$ und $E(Y^2)$ endlich sind.

- a) Zeige: $\text{Cov}(X + Y, X - Y) = 0$.
- b) Zeige an einem Beispiel, dass $X + Y$ und $X - Y$ i.a. nicht stochastisch unabhängig sind.
(Hinweis: X und Y können stochastisch unabhängig und gleichverteilt gewählt werden.)