Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 1
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 1. (3+3 Punkte)

Es sei $(\Omega_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Familie polnischer Räume (d_i ist eine vollständige topologieerzeugende Metrik auf Ω_i). Die Borelsche σ-Algebra auf Ω_i wird mit $\mathscr{B}_i$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass

1. $\Omega = \times_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$ versehen mit der Produkttopologie ebenfalls polnisch ist.
   Hinweis: Beweisen Sie, dass die Metrik

$$d : \times_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i \times \times_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i \to \mathbb{R}_+ , \quad (\omega, \omega') \mapsto \sum_{i\in\mathbb{N}} 2^{-i} \frac{d_i(\omega(i), \omega'(i))}{1 + d_i(\omega(i), \omega'(i))}$$

   vollständig ist und die Produkttopologie erzeugt. Weiter, seien $D_k \subset \Omega_k$ abzählbare dichte Teilmengen. Beweisen Sie, dass für beliebige $\bar\omega \in \times_{i\in\mathbb{N}} D_i$ die Menge

$$D := \left\{\omega \in \times_{i\in\mathbb{N}} D_i : \omega(i) \neq \bar\omega(i) \textit{ nur endlich oft}\right\}$$

   dicht in Ω und abzählbar ist.

2. die Borelsche σ-Algebra $\mathscr{B}$ auf Ω mit der Produkt-σ-Algebra $\otimes_{i\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_i$ übereinstimmt.
   Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass das Mengensystem

$$\mathcal{S} := \left\{ \bigcap_{k\in K} \pi_k^{-1}(\mathrm{Ball}(\omega(k), \frac{1}{n})) : \omega(k) \in D_k, n \in \mathbb{N}, K \subset \mathbb{N} \text{ endlich}\right\}$$

   eine abzählbare Basis der Produkttopologie ist. Hier ist $\pi_k : \Omega \to \Omega_k$ die Projektion und $\mathrm{Ball}(\omega_0(k), \epsilon) := \{\omega(k) \in \Omega_k : d_k(\omega(k), \omega_0(k)) < \epsilon\}$.

Aufgabe 2. (2+2 Punkte)

Es sei $(S, \mathscr{G})$ ein polnischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathscr{B} = \sigma(\mathscr{G})$.

a) Sei μ ein $\{0,1\}$-wertiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}$. Beweisen Sie: es existiert $x \in S$ mit $\mu(\{x\}) = 1$.

b) Seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable und $f : S \to S$ Borel-meßbar. Beweisen Sie: sind X und $f \circ X$ unabhängig, so ist $f \circ X$ $\mathbb{P}$-f.s. konstant.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei $(\Omega_i, \mathscr{F}_i)_{i\in I}$ eine Familie meßbarer Räume, $\Omega := \prod_{i\in I} \Omega_i$, und sei $\mathscr{F} := \bigotimes_{i\in I} \mathscr{F}_i$ die Produkt-σ-Algebra über Ω. Zeigen Sie, dass es zu jedem $A \in \mathscr{F}$ eine abzählbare Teilmenge $I_A \subset I$ existiert, so daß für beliebige $\omega = (\omega_i)_{i\in I} \in \Omega$ und $\tilde\omega = (\tilde\omega_i)_{i\in I} \in A$ gilt:

$$\omega_i = \tilde\omega_i \text{ für alle } i \in I_A \implies \omega \in A.$$

Aufgabe 4. (2+1+2+1 Punkte)
Sei $\mathscr{B}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$, $I = [0,1]$ und $(\Omega, \mathscr{F}) := (\mathbb{R}^I, \mathscr{B}^I)$. Zeigen Sie:

a) Die Menge
$$F := \{\omega : I \to \mathbb{R} \mid \omega(q) \in \mathbb{Q} \; \forall q \in \mathbb{Q} \cap I\}$$
ist meßbar: $F \in \mathscr{F}$.

b) $\{\omega\} \notin \mathscr{F}$ für alle $\omega \in \Omega$.

c) Für die Borelsche σ-Algebra $\mathscr{A}$ über Ω (also die von der Produkttopologie erzeugte σ-Algebra) gilt $\mathscr{A} \neq \mathscr{F}$.

d) $A := C([0,1], \mathbb{R}) := \{\omega : I \to \mathbb{R} \mid \omega \text{ stetig } \} \notin \mathscr{F}$.

Abgabe: Dienstag, 31.10.2006
(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)