Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 1
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 5. (3+3 Punkte)

Es seien X eine Menge, $(Y_i, \mathscr{Y}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Meßräumen und $f_i : X \to Y_i$ $i \in I$ Abbildungen.

1. Ist $\mathscr{G}_i$ ein Erzeuger von $\mathscr{Y}_i$, so ist $\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(\mathscr{G}_i)$ ein Erzeuger von $\sigma(f_i : i \in I)$.

   Notation: $f_i^{-1}(\mathscr{G}_i) := \{f^{-1}(G_i) : G_i \in \mathscr{G}_i\}$, $\sigma(f_i : i \in I) := \sigma(\bigcup_{i\in I} f^{-1}(\mathscr{Y}_i))$

2. Sei $(Z, \mathscr{Z})$ ein weiterer Meßraum und $g : Z \to X$ eine Abbildung. Dann ist $g : (Z, \mathscr{Z}) \to (X, \sigma(f_i : i \in I))$ genau dann messbar, wenn alle Abbildungen $f_i \circ g : (Z, \mathscr{Z}) \to (Y_i, \mathscr{Y}_i)$ messbar sind.

Aufgabe 6. (2+2 Punkte)

Ist $(X_t)_{t\in[0,1]}$ ein reellwertiger stochastischer Prozeß mit stetigen Pfaden auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathscr{F})$ (d.h. für $t \in [0, 1]$ ist $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable, und für $\omega \in \Omega$ ist die Pfadabbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ stetig), so ist die Abbildung

$$X : \Omega \to \mathcal{S}, \quad \omega \mapsto X(\omega) = (X_t(\omega))_{0\leq t\leq 1}$$

$(\mathscr{F}, \mathscr{B})$-meßbar, wobei S ist der Banachraum $(C([0, 1] : \mathbb{R}), || \cdot ||_\infty$ und $\mathscr{B}$ ist die Borel σ-Algebra auf S.

Aufgabe 7. (4 Punkte)

Sei $K : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

(i) $K(s, t) = K(t, s)$ für alle $s, t \in \mathbb{N}$,

(ii) $\sum_{i,j=1}^k K(t_i, t_j)x_i x_j > 0$ f"ur $k \geq 1$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}$, $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \setminus\{0\}$.

Zeigen Sie:

Es gibt einen stochastischen Prozeß $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$, sodass für $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}$ gilt: $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ besitzt eine zentrierte Normalverteilung mit Kovarianzmatrix $(K(t_i, t_j))_{i,j=1}^k$.

Aufgabe 8. (2+1+2+1 Punkte)

Sei λ das Lebesguemaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ und $A \in \mathscr{B}$ eine Borelmenge mit $\lambda(A) > 0$. Zeigen Sie, dass der Nullpunkt ein innerer Punkt der Menge $C := A - A := \{x - y : \ x, y \in A\}$ ist.

Hinweis: Gehen Sie zB folgendermassen vor:

1. *Beweisen Sie, dass es genügt die Aussage für kompakte A zu zeigen.*

2. *Für A kompakt, bestimmen Sie eine offene Menge B mit $A \subset B$ und $\lambda(B) < 2\lambda(A)$. Zeigen Sie, dass $(-\delta, \delta) \subset A - A$, wobei $\delta = \inf\{|x - y| : x \in A,\ y \in B^c\} > 0$.*

Abgabe: Dienstag, 31.10.2006

(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)