Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 3
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Für beliebige $A \in \mathscr{F}$ sei $B_A := \{\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathscr{G}] = 0\}$. Zeigen Sie, dass $B_A \subset A^c$ $\mathbb{P}$-fast sicher.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} + \alpha, \quad \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2} - \alpha$$

für ein $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$. Sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie, dass für beliebige $k \leq n$

$$\mathbb{E}[S_n|\sigma(X_1, \ldots, X_k)] = S_k + 2\alpha(n-k).$$

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}\,|X_1| < \infty$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X_1|S_n]$, wobei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X_i|S_n] = \mathbb{E}[X_j|S_n]$ $\mathbb{P}$*-fast sicher für alle* $i, j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Seien X und Y unabhängige $B(1,p)$-verteilte Zufallsvariablen (d.h. $\mathbb{P}(X = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$). Sei $Z = I_{\{X+Y=0\}}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}(X|Z)$ und $\mathbb{E}(Y|Z)$. Sind die auch unabhängig.

Aufgabe 13. (1+3+3 Punkte)

Es sei $\mathscr{B}$ die Borelsche σ-Algebra über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{B}$. Ferner sei $X \in L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P})$ und

$$\mathscr{F} := \{B \in \mathscr{B} : \; B = -B\}$$

die σ-Algebra der zum Nullpunkt symmetrischen Borelmengen.
Zeigen Sie:

a) $\mathscr{F}$ ist in der Tat eine σ-Algebra.

b) Ist $\mathbb{P}$ symmetrisch zum Nullpunkt, d.h. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(-B)$ für alle $B \in \mathscr{B}$, so folgt

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathscr{F}\right](\omega) = \frac{1}{2}\big(X(\omega) + X(-\omega)\big) \quad \text{für } \mathbb{P}\text{-fast alle } \omega \in \mathbb{R}.$$

c) Besitzt $\mathbb{P}$ eine Dichte $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ bezüglich eines um den Nullpunkt symmetrischen Maßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$, so gilt für $\mathbb{P}$-fast alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[X \,\middle|\, \mathscr{F}\right](\omega) = \Big(\frac{f(\omega)}{f(\omega) + f(-\omega)} X(\omega) + \frac{f(-\omega)}{f(\omega) + f(-\omega)} X(-\omega)\Big) \mathbf{1}_{(0,\infty)}\big(f(\omega) + f(-\omega)\big).$$

Abgabe: Dienstag, 14.11.2006
(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)