Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 4
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 14. (3+3 Punkte)
Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit demselben Erwartungswert m und Varianz σ^2. T sei eine von dieser Folge unabhängige Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$ und endlichem Erwartungswert. Für $S_T := \sum_{i=1}^T X_i$ zeigen Sie, dass

1. $\mathbb{E}[S_T|T] = m\cdot T$ und entsprechend $\mathbb{E}[S_T] = m\,\mathbb{E}\,T$
2. $\mathrm{var}[S_T] = \sigma^2\cdot\mathbb{E}\,T + m^2\mathrm{var}[T]$

Aufgabe 15. (6 Punkte)
Seien $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$ eine Teil-σ-Algebra. Seien ferner $X,Y:\Omega\to\mathbb{R}$ $\mathscr{F}$ bzw. $\mathscr{G}$ messbar. Zeigen Sie, dass falls für alle beschränkte, Borel messbare Funktionen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[g(X)|\mathscr{G}] = g(Y)$ so ist $X = Y$ $\mathbb{P}$-fast sicher.
Hinweis: Gehen Sie zB folgendermassen vor:

1. *Beweisen Sie die Aussage zunächst für X und Y beschränkt in dem Sie zeigen, dass* $\mathbb{E}[(X-Y)^2] = 0$.
2. *Beweisen Sie die Aussage für beliebige X und Y mit Hilfe von 1. durch Approximation.*

Aufgabe 16. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $[0,1]$-wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ mit $X_0 = a\in[0,1]$ und

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{X_n}{2}|\mathscr{F}_n) = 1 - X_n,\ \ \mathbb{P}(X_{n+1} = \frac{1+X_n}{2}|\mathscr{F}_n) = X_n,$$

wobei $\mathscr{F}_n = \sigma(X_1,\dots,X_n)$. Zeigen sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal ist.

Aufgabe 17. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein L^2-Martingal (d.h. $\mathbb{E}[X_n^2] < \infty$ für alle $n\in\mathbb{N}$) bzgl. einer Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass für $0 < k < l < \infty$ die Beziehung

$$\mathbb{E}[X_l^2] - \mathbb{E}[X_k^2] = \sum_{i=k}^{l-1}\mathbb{E}[(X_{i+1}-X_i)^2]$$

gilt.

Abgabe: Dienstag, 21.11.2006
(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)