Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 5
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 18. (1+1+2+2+2 Punkte)
Sei $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration des messbaren Raumes $(\Omega, \mathscr{F})$.

a) Sei $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten bzgl. $(\mathscr{F}_n)$. Zeigen Sie, dass auch

$$\tau := \sup_{k\in\mathbb{N}} \tau_k \quad \text{und} \quad \sigma := \inf_{k\in\mathbb{N}} \tau_k$$

$(\mathscr{F}_n)$-Stoppzeiten sind.

b) Seien τ und σ Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass auch $\tau+\sigma$, $\tau \wedge \sigma$ und $\tau \vee \sigma$ Stoppzeiten sind.

c) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathscr{F}_n)$-adaptierter Prozess, σ eine Stoppzeit und $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Sei

$$\tau = \inf\{n \in \mathbb{N} : \; n \geq \sigma, X_n \in B\} \quad (\text{wobei } \inf\emptyset := +\infty).$$

Zeigen Sie, dass τ eine Stoppzeit ist.

d) Ist τ eine Stoppzeit, so ist

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F} : A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}$$

eine σ-Algebra, und τ sowie $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ sind $\mathscr{F}_\tau$-messbar, wobei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein adaptierter Prozess ist.

e) Sind $\tau \leq \sigma$ zwei Stoppzeiten, so gilt $\mathscr{F}_\tau \subset \mathscr{F}_\sigma$

Aufgabe 19. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger standardnormalverteilter Zufallsvariablen sowie $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Bestimmen Sie eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so daß $(S_n^2 - a_n)_{n\geq 0}$, ein Martingal bezüglich $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ ist.

b) Bestimmen Sie eine Folge reeller Zahlen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, so daß $(e^{S_n - b_n})_{n\geq 0}$, ein Martingal bezüglich $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 0}$ ist.

Aufgabe 20. (2 Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration in $\mathscr{F}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathscr{F}_n)$. Sei $(\mathscr{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Filtration mit $\mathscr{G}_n \subset \mathscr{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Schließlich sei $Y_n = \mathbb{E}\left[X_n \middle| \mathscr{G}_n\right]$ für $n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass der Prozeß $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal bezüglich $(\mathscr{G}_n)$ ist.

Aufgabe 21. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}\,X_1 = 0$ und $\mathbb{E}\,X_1^2 < \infty$. Ferner sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^\infty c_n^2 < \infty$.
Zeigen Sie, daß $\sum_{n=1}^\infty c_n X_n$ $\mathbb{P}$-f.s. konvergiert.

Aufgabe 22. (4 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Martingale bzgl. die Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ und sei T eine Stoppzeit mit $X_T = Y_T$ $\mathbb{P}$-f.s. auf $\{T < \infty\}$. Zeigen Sie, dass

$$Z_n := X_n \mathbb{1}_{\{T>n\}} + Y_n \mathbb{1}_{\{T\leq n\}}$$

auch ein $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Martingal ist.

Abgabe: Dienstag, 28.11.2006
(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)