Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 6
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 23. (1+4 Punkte)

1. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Supermartingal mit $\mathbb{E}\, X_n = \mathbb{E}\, X_1$ für alle n. Zeigen Sie, dass X ein Martingal ist.

2. Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}\,|X_n| < \infty$ für alle n. Zeigen Sie, dass falls $\mathbb{E}\, X_\tau = \mathbb{E}\, X_0$ für alle bescränkte Stopzeiten τ gilt, so ist X ein Martingal.
   (Die Umkehrung von 2 ist der Stopsatz, der später in der Vorlesung gezeigt wird.)
   Hinweis: Betrachten Sie die Stopzeit $\tau_A = n\mathbb{1}_A + (n+1)\mathbb{1}_{A^c}$ (wieso ist τ_A eine Stopzeit?) für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathscr{F}_n$.

Aufgabe 24. (4 Punkte)(Doob-Meyer Zerlegung)
Zeigen Sie, dass jedes $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-Submartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf eindeutige Weise ($\mathbb{P}$-f. s.) als eine Summe $X_n = M_n + A_n$ dargestellt werden kann, wobei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein nichtfallender vorhersehbarer Prozess mit $\mathbb{P}(A_1 = 0) = 1$ sind.
Hinweis: Betrachten Sie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $A_{n+1} - A_n = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathscr{F}_n)$.

Aufgabe 25. (2+2+2+2 Punkte)
Seien $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal auf $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F})_n, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}\, X_n^2 < \infty$ für alle n und $X_n^2 = M_n + A_n$ die Doob-Meyer Zerlegung von X^2.

1. Sei τ eine Stopzeit. Zeigen Sie, dass $A_{n\wedge\tau}$ der wachsender Prozess in der Doob-Meyer Zerlegung von $(X^2_{n\wedge\tau})$ ist.

2. Zeigen Sie, dass für alle $a \geq 0$ $\tau_a = \inf\{n : A_{n+1} > a\}$ eine $(\mathscr{F})_n$ Stopzeit ist.

3. Zeigen Sie, dass der Martingal $(X_{n\wedge\tau_a})$ fast sicher und in L^2 konvergiert.

4. Zeigen Sie, dass auf der Menge $\{\lim_{n\to\infty} A_n < \infty\}$ (X_n) $\mathbb{P}$-fast sicher konvergiert.

Aufgabe 26. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, standardnormalverteilter Zufallsvariablen, sowie $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Der Prozess $Y = (e^{uS_n - \frac{nu^2}{2}})_{n\geq 0}$ ist ein Martingal (vgl. Aufgabe 19). Zeigen Sie, dass Y $\mathbb{P}$-fast sicher konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Für welche Werte des Parameters u ist Y ein reguläres Martingal.