Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

**Blatt 7**
**WS 2006/07**

# Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

**Aufgabe 27.** (2 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $\mathrm{L}^2$-beschränkter Martingal (d.h. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\, M_n^2 < \infty$). Zeigen Sie, dass

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(M_k - M_{k-1})$$

ein $\mathbb{P}$-fast sicher und in $\mathrm{L}^2$ konvergentes Martingal ist.

**Aufgabe 28.** (2+3+3 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$, und sei $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $a \in \mathbb{Z}$ sei $\tau_a = \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : \ S_n = a\}$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(\tau_a < \infty) = 1$ für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt.
2. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < 0$ und $b > 0$. Ferner sei $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(\tau = \tau_a)$.
   *Hinweis: Überlegen Sie sich, dass $\mathbb{E}(S_\tau) = 0$ ist.*
3. Berechnen Sie die Erwartungswert von $\tau$.
   *Hinweis: Zeigen Sie, dass $S_n^2 - n$ ein Martingal ist.*

**Aufgabe 29.** (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Teil-$\sigma$-Algebra und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Beweisen Sie:
Ist $\mathbb{E}[e^{iuY}|\mathcal{G}] = \mathbb{E}\left[e^{iuY}\right]$ für $u \in \mathbb{R}$, so ist $Y$ unabhängig von $\mathscr{G}$.

**Aufgabe 30.** (2 Punkte)
Für welche Folgen reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die Folge $X_n := a_n \mathbf{1}_{[0,n^{-1}]}$, $n \in \mathbb{N}$, gleichgradig integrierbar bezüglich des Lebesguemaßes $\mathbb{P} := \boldsymbol{\lambda}_{[0,1]}$ auf $[0,1]$?

**Aufgabe 31.** (4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, d)$ ein Polnischer Raum. Zeigen Sie, dass die Konvergenz nach Maß (Konvergenz in Wahrscheinlichkeit) durch die Metrik

$$d_W(f, g) = \mathbb{E}\, 1 \wedge d(f, g)$$

metrisiert wird, d.h. eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(E, d)$ wertigen Zufallsvariablen genau dann gegen $f$ in Wahrscheinlichkeit konvergiert, wenn $d_W(f_n, f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt.