Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 8
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 32. (3 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mathbb{P})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein adaptierter reellwertiger stochastischer Prozess mit $0 \le Y_n \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ für eine Konstante $c < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Y_n = \infty\right\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n|\mathscr{F}_{n-1}] = \infty\right\} \quad \mathbb{P}-\text{f.s.},$$

wobei $\mathscr{F}_0$ die triviale σ-Algebra ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $M_n := \sum_{i=1}^{n}[Y_i - \mathbb{E}[Y_i|\mathscr{F}_{i-1}]]$ *ein Martingal mit beschränkten Zuwächsen ist.*

Aufgabe 33. (3+2+2 Punkte) Zeigen Sie, dass durch $\rho(X,Y) = \inf\{\epsilon > 0 : \mathbb{P}(|X-Y| \ge \epsilon) \le \epsilon\}$ eine Metrik auf $\mathrm{L}^0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ definiert ist. Zeigen Sie, dass

$$\rho(X_n, X) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X \text{ nach Maß}.$$

Ist der L^0 vollständig bezüglich ρ?

Aufgabe 34. (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ mit $X_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} X_\infty$ $\mathbb{P}$-fast sicher und $\sup_n |X_n| \in \mathrm{L}^1$. Weiter sei $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration mit $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\cup \mathscr{F}_n) \subset \mathscr{F}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}[X_n|\mathscr{F}_m] = \mathbb{E}[X_\infty|\mathscr{F}_\infty] \quad \mathbb{P}-\text{f.s. und in } \mathrm{L}^1.$$

Aufgabe 35. (5 Punkte)
In der Situation von Aufgabe 28 (symmetrische Irrfahrt), berechnen Sie für $\lambda \ge 0$ und $a \in \mathbb{N}$ die Laplace-Transformierte $\mathbb{E}[e^{-\lambda\sigma}]$ von $\sigma := \inf\{n : |S_n| = a\}$.
Hinweis: Bestimmen Sie $u(\lambda)$ *so, dass* $M_n = \exp[u(\lambda)S_n - \lambda n]$ *ein Martingal ist.*

Abgabe: Dienstag, 19.12.2006
(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)