Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 9
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 36. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}\,|X_1|^2<\infty$ und $\mathbb{E}(X_1)=0$, und sei τ eine Stoppzeit bezüglich $\mathscr{F}_n:=\sigma(X_1,\ldots,X_n)$, $n\in\mathbb{N}$, mit $\mathbb{E}(\tau)<\infty$. Ferner sei $S_n:=\sum_{i=1}^n X_i$ für $n\in\mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{Var}(S_\tau)=\operatorname{Var}(X_1)\,\mathbb{E}(\tau).$$

Aufgabe 37. (7 Punkte)
Sei $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Filtration in $\mathscr{F}$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein $(\mathscr{F}_n)$-adaptierter Prozeß mit Werten in einem meßbaren Raum $(S,\mathcal{S})$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) (X_n) besitzt die elementare Markov-Eigenschaft bezüglich $(\mathscr{F}_n)$, d.h. für $n\in\mathbb{N}$, $A\in\mathcal{S}$ gilt
$$\mathbb{P}\left[X_{n+1}\in A\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right]=\mathbb{P}\left[X_{n+1}\in A\,\middle|\,X_n\right].$$

(ii) Für jede beschränkte meßbare Funktion $f:S\to\mathbb{R}$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt
$$\mathbb{E}\left[f\circ X_{n+1}\,\middle|\,\mathscr{F}_n\right]=\mathbb{E}\left[f\circ X_{n+1}\,\middle|\,X_n\right].$$

(iii) Für alle $n\in\mathbb{N}$, $B\in\mathscr{F}_n$ und $C\in\mathscr{G}_n:=\sigma(X_m:\ m\geq n)$ gilt:
$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B\mathbf{1}_C\,\middle|\,X_n\right]=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_B\,\middle|\,X_n\right]\ \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_C\,\middle|\,X_n\right].$$

(Was bedeutet diese Umformulierung anschaulich?)

Hinweis: Bei der Beweis von (i)⇒(iii) gehen Sie zB folgendermassen vor: 1. Zeigen Sie, dass für beliebige $k\in\mathbb{N}$ $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|X_n]$ *für alle* $A\in\sigma(X_n,\ldots,X_{n+k})$. *2. Folgern Sie, dass* $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|\mathscr{F}_n]=\mathbb{E}[\mathbf{1}_A|X_n]$ *für alle* $A\in\mathscr{G}_n$. *Mit Hilfe von 2. zeigen Sie die Implikation.*

Aufgabe 38. (3 Punkte)
$(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{P}(\xi_1=1)=p$ und $\mathbb{P}(\xi_1=-1)=q$. Seien ferner $S_n=\sum_{i=1}^n\xi_i$ und $M_n=\max\{S_k|0\leq k\leq n\}$.

1. Zeigen Sie, dass $Y_n=M_n-S_n$ eine Markovkette ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.
2. Zeigen Sie, dass $M_n=Y_n+S_n$ keine Markovkette ist.

Aufgabe 39. (3 Punkte)
Die Übergangsmatrix einer Markovkette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Zustandsraum $S=\{1,2\}$ sei gegeben durch
$$P=\begin{pmatrix}1-\alpha & \alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$$
mit $\alpha,\beta\in[0,1]$. Berechnen Sie P^n für $n\in\mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty}P^n$, falls der Grenzwert existiert.

Aufgabe 40. (3 Punkte)

Sei $(X_n)_{n\geq0}$ eine Markovkette mit der Übergangsmatrix
$$P\ =\begin{pmatrix}1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die rekurrenten und die transienten Zustände sowie die irreduziblen Klassen R_i.

Abgabe: Dienstag, 09.01.2006

(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)