Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 10
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 40. (4 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit der Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die rekurrenten und die transienten Zustände sowie die irreduziblen Klassen R_i.

Aufgabe 41. (5 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum S und Übergangsmatrix P. Es existiere ein $x \in S$, so dass

1. $\mathbb{P}_x(\tau_y < \infty) > 0$ für alle $y \in S$ und
2. $\mathbb{P}_y(\tau_x < \infty) = 1$ für alle $y \in S$.

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ irreduzibel und rekurrent ist.
Wir verwenden die übliche Bezeichnung $\tau_x = \inf\{n \geq 0 : X_n = x\}$.

Aufgabe 42. (5 Punkte)
Beim Modellieren von Evolution genetischen Konfigurationen betrachtet man die Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $S = \{0, \ldots, N\}$ und Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ mit

$$p_{ij} = \binom{N}{j} \left(\frac{i}{N}\right)^j \left(\frac{N-i}{N}\right)^{N-j},$$

d.h. $P_{i,\cdot}$ ist die Binomialverteilung mit Parameter N und $\frac{i}{N}$ für festes i. In der obigen Interpretation N ist die Anzahl der Individuen und i die Anzahl der Individuen mit einem bestimmten Genotyp.

1. Bestimmen Sie die rekurrenten und die transienten Zustände von $(X_n)_{n\geq 0}$. Ist die Markovkette Irreduzibel?
2. Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\geq 0}$ ein reguläres Martingal ist und berechnen Sie die Verteilung von X_∞.

Aufgabe 43. (3+3 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum S und Übergangsmatrix P. Seien $A \subset S$ und τ_A der Eintrittszeit in A, d.h. $\tau_A := \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$. Es existieren $n \geq 0$ und $\alpha > 0$, so dass $\sum_{x\in A} P^n_{y,x} \geq \alpha$ für alle $y \in A^C$ gilt.

1. Zeigen sie, dass $\mathbb{P}_x(\tau_A > kn) \leq (1-\alpha)^k$ für belibige $k \in \mathbb{N}$ und $x \in S$ gilt. Folgern Sie, dass $\mathbb{E}_x\, \tau_A \leq \frac{n}{\alpha}$, insbesondere ist τ_A $\mathbb{P}_x$-f.s. endlich.
2. Zeigen sie, dass $\mathbb{P}_x(\tau_A > u) \leq (1-\alpha)^{\frac{u}{n}-1}$ für belibige $u > 0$ und $x \in S$ gilt. Folgern Sie, dass $\mathbb{E}_x\, e^{\rho\tau_A} < \infty$ für $\rho < -\frac{1}{n}\ln(1-\alpha)$.

Abgabe: Dienstag, 16.01.2007
(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)