Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 11
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 44. (2+3+3 Punkte)(Metropolis Algorithmus)
Seien P eine irreduzible, symmetrische Übergangsmatrix auf dem endlichen Zustandsraum E und π ein Wahrscheinlichkeitsmass auf E mit $\pi(i) > 0$ für alle $i \in E$. Ferner sei die Übergangsmatrix Q folgendermassen definiert

$$Q(i,j) = \begin{cases} P(i,j) & \text{falls } \pi(j) \geq \pi(i) \text{ und } i \neq j \\ P(i,j)\frac{\pi(j)}{\pi(i)} & \text{falls } \pi(j) < \pi(i) \\ 1 - \sum_{j \neq i} Q(i,j) & \text{falls } i = j \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass π die invariante Verteilung der Markovkette mit Übergangsmatrix Q ist.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass Q bezüglich π reversibel ist.
2. Zeigen Sie, dass Q irreduzibel ist.
3. Angenommen, π ist nicht die Gleichverteilung auf E (sonst ist $P = Q$). Sei $M \subset E$ folgendermassen definiert

$$M = \{i \in E : \pi(i) \geq \pi(j) \text{ für alle } j \in E\} .$$

   (3.1) Zeigen Sie, dass es ein $i_0 \in M$ gibt, so dass $P(i_0, j) > 0$ für ein $j \notin M$. Folgern Sie, dass $Q(i_0, i_0) > 0$.
   (3.2) Zeigen Sie, dass Q aperiodisch ist. (P kann durchaus periodisch sein.)

Aufgabe 45. (2+3+3 Punkte) (Der Kontraktionskoeffizient)
Seien μ, ν und P zwei Verteilungen und eine Übergangsmatrix auf einem höchstens abzählbaren Raum S. Der Kontraktionskoeffizient von P sei folgendermassen definiert:

$$C(P) := \frac{1}{2} \sup_{x,y \in S} \{||P(x,\cdot) - P(y,\cdot)||_1\} := \frac{1}{2} \max_{x,y \in S} \left\{ \sum_{z \in S} |P(x,z) - P(y,z)| \right\} .$$

Zeigen Sie, dass

1. $||\mu - \nu||_1 = \sup \left\{ \left| \sum_{x \in S} h(x)(\mu(x) - \nu(x)) \right| : h : S \to [-1,1] \right\}$.
2. $||\mu P - \nu P||_1 \leq C(P)||\mu - \nu||_1$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass für beliebige beschränkte Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$,
   $| \sum_{x \in S}(\mu(x) - \nu(x))f(x)| \leq ||\mu - \nu||_1 \frac{1}{2} \sup_{x,y \in S} |f(x) - f(y)|$ *gilt.*
3. Für je 2 beliebige stochastische Matritzen P und Q gilt $C(PQ) \leq C(P)C(Q)$, falls PQ wohldefiniert ist.

Aufgabe 46. (2+2 Punkte)
Die Übergangsmatrix $P = (p_{ij})_{i,j \in S}$ einer irreduziblen Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum S sei doppelt stochastisch, d.h. es gelte $\sum_{i \in S} p_{ij} = 1$ für alle $j \in S$. Zeigen Sie:

a) Ist S endlich, so ist (X_n) positiv rekurrent, d.h. $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$ für alle $x \in S$. (Dabei bezeichnet T_x die erste Rückkehrzeit der Kette nach $x \in S$.)

b) Ist S abzählbar unendlich, so ist (X_n) transient oder nullrekurrent.