Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik

Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 12
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 47. (2+2 Punkte)(Metropolis Algorithmus)
Seien P, Q und π wie in Aufgabe 40. Angenommen, π ist nicht die Gleichverteilung auf E (sonst ist $P = Q$). Sei $M \subset E$ folgendermassen definiert

$$M = \{i \in E : \pi(i) \geq \pi(j) \text{ für alle } j \in E\} .$$

(1) Zeigen Sie, dass es ein $i_0 \in M$ gibt, so dass $P(i_0, j) > 0$ für ein $j \notin M$. Folgern Sie, dass $Q(i_0, i_0) > 0$.

(2) Zeigen Sie, dass Q aperiodisch ist. (P kann durchaus periodisch sein.)

Insbesondere konvergiert die Verteilung von X_n (X_n ist eine Markov Kette mit Übergangsmatrix Q) für einen beliebigens Startpunkt gegen die invariante Verteilung π.

Aufgabe 48. (2+3+1 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}_0$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $0 < p_k < 1$ für alle $k \geq 0$.

a) Zeigen Sie, dass (X_n) genau dann transient ist, wenn $\prod_{k=0}^{\infty} p_k > 0$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass im transienten Fall kein stationäres Maß existiert. Bestimmen Sie das (eindeutig bestimmte?!) stationäre Maß, falls (X_n) rekurrent ist.

c) Unter welcher Bedingung ist (X_n) positiv rekurrent?

Aufgabe 49. (3+2+1+3+1 Punkte)
Wir betrachten das aus der Vorlesung bekannte Ehrenfestsche Urnenmodell: sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die zugehörige Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{0, \dots, r\}$, d.h. X_n beschreibt die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n und P sei die Übergangsmatrix.

1. Zeigen Sie, dass (X_n) unter der stationären Verteilung μ *reversibel* ist, d.h. ist $\mathbb{P}_{X_0} = \mu$, so gilt $\mathbb{P}_{(X_0,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{(X_n,\dots,X_0)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Betrachten Sie die Markov-Kette (Y_n) mit $Y_n = X_{2n}$.

   (a) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix Q von (Y_n). Ist (Y_n) aperiodisch? Bestimmen Sie die stationäre Verteilung π falls sie existiert.

   (b) Bestimmen sie die irreduziblen Klassen C_i von (Y_n).

   (c) Geben Sie das asymptotische Verhalten von $Q^n(x, y)$ für $n \to \infty$ an.
   Hinweis: betrachten Sie d ie Einschränkungen $Q^{(i)}$ von Q auf C_i und die Verteilungen $\pi^{(i)}$ auf C_i mit $\pi^{(i)}(A) = \pi(A|C_i)$ für $A \subset C_i$

3. Gilt $\lim_{n\to\infty} P^n(x, y) = \mu(y)$ für beliebige x, $y \in S$?