Humboldt-Universität zu Berlin
Bereich Stochastik
Prof. Dr. Peter Imkeller
Georgi Dimitroff

Blatt 13
WS 2006/07

Übungen zur Vorlesung "Stochastik II"

Aufgabe 50. (4 Punkte)
Sei (S, d) ein vollständiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subset S$ genau dann total beschränkt ist (bzgl. d) wenn A relativ kompakt ist.
Hinweis: In metrischen Räumen ist Kompaktheit äquivalent zur Folgenkompaktheit.

Aufgabe 51. (4 Punkte)
Sei $\mathcal{O}$ die übliche Topologie in $\mathbb{R}$. Betrachten Sie die Topologien

$$\mathcal{O}_< := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$$
$$\mathcal{O}_> := \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie, dass eine reellwertige Funktion f auf einen metrischen Raum (S, d) genau dann von unten (bzw von oben) halbstetig ist wenn $f : (S, d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_>)$ (bzw $f : (S, d) \to (\mathbb{R}, \mathcal{O}_<)$) stetig ist.

Aufgabe 52. (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine reellwertige Funktion f auf einen metrischen Raum (S, d) genau dann von unten (bzw von oben) halbstetig ist wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Mengen $f^{-1}((-\infty, a])$ (bzw $f^{-1}([a, \infty))$) abgeschlossen sind.

Aufgabe 53. (3+4+3 Punkte)
Sei (S, d) ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}$. Für $A \in \mathscr{B}$ und $\varepsilon > 0$ sei $A^\varepsilon := \{x \in S : d(x, A) < \varepsilon\}$ die ε-Umgebung von A. Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße μ, ν auf $\mathscr{B}$ setzen wir

$$\rho(\mu, \nu) := \inf\big\{\varepsilon > 0 : \ \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \quad \forall A \in \mathscr{B}\big\}.$$

a) Zeigen Sie, dass ρ eine Metrik auf $M(S)$ ist.

b) Sei (S, d) zusätzlich separabel. Zeigen Sie: für eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ in $M(S)$ gilt $\mu_n \xrightarrow{w} \mu_0$ genau dann, wenn $\rho(\mu_n, \mu_0) \to 0$.

c) Seien X, Y $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsvariablen auf einem W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass

$$\rho\big(\mathbb{P}_X, \mathbb{P}_Y\big) \leq \alpha(X, Y),$$

wobei die Metrik

$$\alpha(X, Y) := \inf\big\{\varepsilon \geq 0 : \ \mathbb{P}(\|X - Y\| > \varepsilon) \leq \varepsilon\big\}.$$

auf $L^0(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ (die Menge aller Äquivalenzklassen $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvariablen bzgl. $\mathbb{P}$-fast sicherer Gleichheit) die stochastische Konvergenz metrisiert (vgl Aufgabe 33 vom Blatt 8).

Abgabe: Dienstag, 06.02.2007
(Sie dürfen Ihre Lösungen in 2er-Gruppen abgeben.)