

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 5/2/170

(S: Varianten)

Trigonalisierung

Index: trigonalisierbare Matrix, Fahne in einem Vektorraum, vollständige bzw. maximale Fahne

Stoffeinheiten: 5/2/13 - 5/2/17 Trigonalisierung

Trigonalisieren Sie die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

d.h. geben Sie eine obere Dreiecksmatrix B sowie eine reguläre Matrix U an, für die $B = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

Lösung. Zur Trigonalisierung der Matrix A berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A)$. Es ist $\chi_A = (X - 4)^3$ (daraus folgt, dass A trigonalisierbar, nicht jedoch diagonalisierbar ist, denn die Ähnlichkeitsklasse einer Matrix $\lambda \cdot E_n$ ist einelementig). Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda = 4$ haben wir das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\lambda \cdot E_3 - A$, d.h. das System

$$\begin{aligned} -x_2 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -6x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir finden als Basis seines eindimensionalen Lösungsraumes einen Vektor $\mathbf{v}_1 = (-1, 0, -3)$.

Wird mit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Endomorphismus des Standardraumes bezeichnet, der durch $M(\varphi) = A$ definiert ist, so gilt zunächst $\varphi(\mathbf{v}_1) = \lambda \cdot \mathbf{v}_1$. Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir $\mathbf{v}_1$ zu einer Basis $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ergänzen, für die die dritte Koordinate des Vektors $\varphi(\mathbf{v}_2)$ verschwindet.

Zunächst kann einer der Vektoren der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ durch den hier gefundenen Vektor $\mathbf{v}_1$ ersetzt werden, so dass wiederum eine Basis entsteht; wir wählen $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Mit diesen Vektoren als Spalten ergibt sich eine Übergangsmatrix

$$U_1 := U_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und so eine zu A ähnliche Matrix

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$A_1 = U_1^{-1} \cdot A \cdot U_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Teilmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \in M(2; \mathbb{R})$$

der Matrix A hat als einzigen Eigenwert ebenfalls $\lambda = 4$. Lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$(\lambda \cdot E_2 - A') \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir für A' einen Eigenvektor $(-1, -2) \in \mathbb{R}^2$. Wählen wir Vektoren $\mathbf{v}_2$ mit den Koordinaten $(0, -1, -2)$ und $\mathbf{v}_3$ mit Koordinaten $(0, 0, 1)$ (bezüglich $\mathcal{B}_1$), so entsteht eine neue Basis $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ des Standardraumes $\mathbb{R}^3$, für die $M_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Mit der Übergangsmatrix

$$U_2 := U_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$M_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = U_2^{-1} \cdot A_1 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

diese Matrix ist eine Trigonalisierung von A , d.h.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U$$

mit

$$U = U_1 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$