HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II

Institut für Mathematik

Preprint Nr. 2004-17

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Lineare Algebra individuell
Aufgabensammlung

Roczen, Marko und Wolter, Helmut
unter Mitarbeit von
Pohl, Wilfred; Popescu, Dorin; Laza, Radu:
Lineare Algebra individuell, Aufgabensammlung
Institut für Mathematik
an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II
der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004, 305 S.
(Preprint; 2004-17)

ISSN 1439-9679

Anforderungen an: Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik
D-10099 Berlin
Germany

Vorwort

Diese Aufgabensammlung ist der fachliche Teil des Schlussberichts für das vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderte Projekt 01NM075D zur interaktiven Mathematik- und Informatik-Grundausbildung an der Humboldt-Universität zu Berlin. Der zur Veröffentlichung bestimmte allgemeine Teil des Berichts kann auf den Internet-Seiten des Projekts unter http://www.math.hu-berlin.de/~in2math/results.html eingesehen werden; dort finden sich auch Verweise auf Ergebnisse zur Analysis-Grundausbildung.

Als Preprint am Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin erschienen, steht das vorliegende Material gleichzeitig im PDF-Format unter

http://www.math.hu-berlin.de/~in2math/aufg/laAufg.pdf

zur Verfügung; es beinhaltet eine Sammlung von 525 Aufgaben zur linearen Algebra. Einschließlich der über die Online-Fassung zugänglichen Links (als Varianten gekennzeichnet) ergeben sich durch Modifikation von Anfangswerten ca. 4700 Einzelaufgaben.
Die Druckfassung kann nur einen Teil der Vorteile erbringen, die durch die Hypertext-Funktionalität der elektronischen Fassung geboten werden. Angesichts bestehender Nachfrage können sich jedoch beide Versionen nützlich erweisen: für Studierende als Hilfe bei der Lösung ausgewählter Übungsaufgaben, für Lehrende zur Vorbereitung von Aufgabenserien und Klausuren. Die ausführliche systematische Gliederung und ein umfangreiches Sachverzeichnis können dabei als Orientierung zur Gestaltung von Vorlesungen, Übungen und Prüfungen dienen.

Gliederung und Schwerpunkte entsprechen dem gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell, in dem Resultate aus dem Projekt verwertet werden.

Die Aufgaben des vorliegenden Materials (Teil II) sind mit Links zur systematischen Gliederung (Teil I) versehen. Eine Zuordnung ist sicher nicht in allen Fällen eindeutig möglich – sie ist hier so gewählt, dass spätestens mit den zitierten Schwerpunkten der für die Lösung erforderliche Stoff als bekannt vorausgesetzt werden kann.
Links zu Textstellen der Online-Fassung sind blau markiert; Hyperlinks (rot gekennzeichnet) verweisen auf weitere Dateien oder Web-Inhalte. Die Nummerierung der Aufgaben folgt der systematischen Gliederung (beispielsweise sind die Aufgaben zum Abschnitt 1.3 mit 1/3/... bezeichnet).

Die Humboldt-Universität hat dem Projekt perfekte Arbeitsbedingungen geboten. Wir danken überdies Frau Margit Todorov und Herrn Torsten Wetzel für ihre Sorgfalt bei der sprachlichen bzw. inhaltlichen Durchsicht der Aufgaben.

Berlin, im Juli 2004

Teil I: Systematische Gliederung

Kapitel 0

Grundlagen aus der Mengenlehre und der Logik

Stoffeinheiten 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Schwerpunkte

- Mengentheoretische Grundbegriffe (Elementbeziehung, Gleichheit von Mengen, Inklusion)
- Erste Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung, Differenzmenge, Komplementärmenge)
- Natürliche Zahlen
- Potenzmenge einer Menge
- Kartesisches Produkt endlich vieler Mengen
- Durchschnitt und Vereinigung von Mengenfamilien

Stoffeinheiten 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Schwerpunkte

- Gebrauch von: nicht, und, oder, wenn–so, genau dann – wenn
- Die Quantoren $\exists$, $\forall$ und ihre Verneinung
- Beweisprinzipien (Modus ponens, Kettenschluss, Kontraposition, indirekter Beweis, vollständige Induktion)

Stoffeinheiten 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Schwerpunkte

- Ordnungsrelation, geordnete Menge (kleinstes, größtes, minimales, maximales Element)
- Begriff der Abbildung (Bild, Urbild, Quelle, Ziel)
- Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen
- Produkt von Abbildungen , Eigenschaften, Inverse einer Bijektion
- Begriff der Äquivalenzrelation (Partition, Klasseneinteilung)

- Invarianten einer Äquivalenzrelation, kanonische Abbildung, (vollständiges) Invariantensystem, System von Normalformen
- Gleichmächtige Mengen, Eigenschaften der Gleichmächtigkeit von Mengen

Stoffeinheiten 0/4/1 - 0/4/16 Das Auswahlaxiom

Schwerpunkte

- Kartesisches Produkt einer Familie von Mengen, Auswahlaxiom
- Induktive Ordnungen und zornsches Lemma (für die Anwendungen genügt das Resultat)
- zornsches Lemma, erste Anwendungen

Stoffeinheiten 0/5/1 - 0/5/16 Kardinalzahlen

Schwerpunkte

- Ordinalzahlen (für die Anwendungen genügt der intuitive Begriff)
- Kardinalzahl einer Menge, Rechnen mit Kardinalzahlen (für die Anwendungen genügt der intuitive Begriff)
- Einfachste Operationen mit Kardinalzahlen (Summe, Produkt), Vergleich von Kardinalzahlen

Kapitel 1

Erste algebraische Strukturen

1.1 Gruppen

Stoffeinheiten 1/1/1 Monoide

Schwerpunkte

- Monoid (Begriff, erste Beispiele)
- Produkt- und Summen-Notation in Monoiden

Stoffeinheiten 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Schwerpunkte

- Gruppe (Begriff und elementare Eigenschaften)
- Erste Beispiele für Gruppen

Stoffeinheiten 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

Schwerpunkte

- Untergruppen (Untergruppenkriterium, Erzeugendensysteme)
- Gruppenhomomorphismen (Begriff, Eigenschaften)

Stoffeinheiten 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen
Schwerpunkte

- Die Gruppe S_n (Rechnen mit Permutationen)
- Zyklen und Transpositionen
- Vorzeichen (Signum) einer Permutation
- Zerlegung von Permutationen in Zyklen bzw. Transpositionen

Stoffeinheiten 1/1/19 - 1/1/22 Nebenklassen einer Untergruppe
Schwerpunkte

- Linke und rechte Nebenklassen einer Untergruppe
- Satz von Lagrange, Index einer Untergruppe

Stoffeinheiten 1/1/23 Bild und Kern eines Gruppenhomomorphismus
Schwerpunkte

- Kern eines Gruppenhomomorphismus
- Bild und Kern als Untergruppen

Stoffeinheiten 1/1/24 - 1/1/28 Faktorgruppen, das Homomorphieprinzip
Schwerpunkte

- Faktorgruppe und kanonischer Homomorphismus
- Jeder Normalteiler ist Kern eines Gruppenhomomorphismus
- Der Homomorphiesatz
- Klassifikation der zyklischen Gruppen

1.2 Ringe und Körper

Stoffeinheiten 1/2/1 - 1/2/2 Ringoperationen
Schwerpunkte

- Ringoperationen (elementare Eigenschaften, allgemeines Distributivgesetz, binomischer Satz)
- Erste Beispiele für Ringe

Stoffeinheiten 1/2/3 Unterringe, Ringhomomorphismen
Schwerpunkte

- Unterringe eines Ringes
- Ringhomomorphismen und Isomorphismen
- Elementare Eigenschaften von Ringhomomorphismen

Stoffeinheiten 1/2/4 - 1/2/5 Integritätsbereiche und Körper
Schwerpunkte

- Nullteilerfreie Ringe (Integritätsbereiche)
- Kürzungsregel in Integritätsbereichen
- Körper und Unterkörper, Beispiele

Stoffeinheiten 1/2/6 Rationale Zahlen, Quotientenkörper
Schwerpunkte

- Konstruktion der rationalen Zahlen
- Verallgemeinerung der Konstruktion rationaler Zahlen (Konstruktion von Quotientenkörpern beliebiger Integritätsbereiche)

Stoffeinheiten 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen
Schwerpunkte

- Komplexe Zahlen (Realteil, Imaginärteil, Konjugation)
- Rechnen mit komplexen Zahlen
- Fundamentalsatz der Algebra (ohne Beweis)

Stoffeinheiten 1/2/9 - 1/2/11 Polynome in einer Unbestimmten
Schwerpunkte

- Der Polynomring in einer Unbestimmten (Definition)
- Prinzip des Koeffizientenvergleichs
- Grad eines Polynoms, Eigenschaften der Gradfunktion
- Ein Polynomring über einem Integritätsbereich ist wieder ein Integritätsbereich

Stoffeinheiten 1/2/12 - 1/2/15 Algebren
Schwerpunkte

- Begriff der Algebra über einem Ring, Strukturhomomorphismus
- Homomorphismen und Isomorphismen von Algebren
- Universaleigenschaft und Eindeutigkeit der Polynomalgebra

Stoffeinheiten 1/2/16 - 1/2/18 Polynome in mehreren Unbestimmten
Schwerpunkte

- Definition der Polynomalgebra $R^{[n]}$ in n Unbestimmten (Monome, Terme, vollständiger Grad)
- Universalität von $R^{[n]}$
- Adjunktion von Elementen

Stoffeinheiten 1/2/19 - 1/2/25 Der Begriff der Teilbarkeit
Schwerpunkte

- Teilbarkeit einem kommutativen Integritätsbereich
- Assoziiertheit als Äquivalenzrelation
- Gruppe der Einheiten und irreduzible Elemente

- Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

Stoffeinheiten 1/2/26 - 1/2/28 Teilbarkeitslehre im Ring der ganzen Zahlen
Schwerpunkte

- Der euklidische Algorithmus
- Lemma von Euklid, Primzahlen
- Hauptsatz der Arithmetik

Stoffeinheiten 1/2/29 - 1/2/33 Das Homomorphieprinzip für Ringe
Schwerpunkte

- Ideale, durch Teilmengen eines Ringes erzeugte Ideale, Hauptideale
- Konstruktion von Faktorringen
- Homomorphiesatz für Ringe

Stoffeinheiten 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik
Schwerpunkte

- Die endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ (p Primzahl)
- Der Primkörper eines Körpers

1.3 Matrizen

Stoffeinheiten 1/3/1 - 1/3/2 Der Begriff der Matrix
Schwerpunkte

- Definition der Matrix, Typ einer Matrix, Zeilenindex und Spaltenindex
- Zeilen und Spalten einer Matrix, transponierte Matrix

Stoffeinheiten 1/3/3 Erste Matrizenoperationen
Schwerpunkte

- Rechnen mit Matrizen über kommutativen Ringen (Addition und Multiplikation mit Elementen des Grundringes)
- Ausführen der Matrizenoperationen an einfachen Beispielen

Stoffeinheiten 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen
Schwerpunkte

- Definition des Matrizenprodukts und einige Rechenregeln
- Kroneckersymbol und Einheitsmatrix
- Spezielle quadratische Matrizen (obere und untere Dreiecksmatrizen, schiefsymmetrische Matrizen, Blockdiagonalmatrizen)

Kapitel 2

Algebraische Gleichungen

2.1 Aufgabenstellung

Stoffeinheiten 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Schwerpunkte

- Begriff der Lösungsmenge eines polynomialen Gleichungssystems, einfachste Eigenschaften und Beispiele

Stoffeinheiten 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Schwerpunkte

- Äquivalenz linearer Gleichungssysteme
- Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

2.2 Der gaußsche Algorithmus

Stoffeinheiten 2/2/1 - 2/2/6 Transformation in eine Stufenform

Schwerpunkte

- Elementare Umformungen linearer Gleichungssysteme
- Division mit Rest für lineare Polynome
- Gaußscher Algorithmus zur Überführung eines Systems in Stufengestalt; praktische Ausführung

Stoffeinheiten 2/2/7 - 2/2/13 Beschreibung eines linearen Gleichungssystems durch Matrizen und reduzierte Form

Schwerpunkte

- Beschreibung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems
- Zeilenäquivalente Umformungen von Matrizen
- Reduzierte Form eines linearen Gleichungssystems, Existenz und Eindeutigkeit, praktische Bestimmung

2.3 Matrizenrechnung

Stoffeinheiten 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Schwerpunkte

- Rang einer Matrix, Rangbestimmung unter Verwendung elementarer Zeilenoperationen
- Der Satz von Kronecker-Capelli und Anwendung auf Systeme mit quadratischer Koeffizientenmatrix

Stoffeinheiten 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe
Schwerpunkte

- Definition und Charakterisierung invertierbarer Matrizen
- Die Gruppeneigenschaft von $\mathrm{GL}(n;K)$
- Praktische Bestimmung der Inversen einer quadratischen Matrix mit dem gaußschen Algorithmus

Stoffeinheiten 2/3/10 Beispiel: Hill - Ciphern
Schwerpunkte

- Durch eine reguläre Matrix über $\mathbb{F}_{29}$ gegebene Kryptosysteme (Hill-Ciphern)

Stoffeinheiten 2/3/11 - 2/3/15 Hauptsatz der Matrizenrechnung
Schwerpunkte

- Erzeugung der allgemeinen linearen Gruppe durch Elementarmatrizen
- Der Rang einer Matrix stimmt mit dem ihrer Transponierten überein

Stoffeinheiten 2/3/16 - 2/3/18 LR-Zerlegung und Gauß - Bruhat - Zerlegung
Schwerpunkte

- Die Untergruppen der Permutationsmatrizen, der oberen und der unteren Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}(n;K)$
- LR-Zerlegung und Gauß-Bruhat-Zerlegung einer regulären Matrix; praktische Ausführung der Zerlegung

2.4 Teilbarkeitslehre im Polynomring einer Unbestimmten

Stoffeinheiten 2/4/1 - 2/4/4 Der euklidische Algorithmus
Schwerpunkte

- Leitmonome, Division mit Rest
- Euklidischer Algorithmus (Kettendivision) für Polynome einer Unbestimmten

Stoffeinheiten 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung
Schwerpunkte

- Nullstellen von Polynomen in einer Unbestimmten (Ausklammern von Linearfaktoren, Multiplizität einer Nullstelle)
- Identitätssatz für Polynome

- Irreduzible Faktoren reeller bzw. komplexer Polynome
- Beispiele irreduzibler Polynome
- Existenz und Eindeutigkeit der Faktorzerlegung in $K[X]$

Stoffeinheiten 2/4/15 - 2/4/21 Endliche algebraische Körpererweiterungen
Schwerpunkte

- Zerfällungskörper eines Polynoms
- *Im Polynomring $K[X]$ einer Unbestimmten über dem Körper K ist jedes Ideal Hauptideal
- *Faktorringe nach irreduziblen Polynomen aus $K[X]$ sind Körper
- *Satz von Kronecker, Existenz und Eindeutigkeit des Zerfällungskörpers eines Polynoms
- Die formale Ableitung eines Polynoms und mehrfache Nullstellen in Erweiterungskörpern

2.5 Allgemeine polynomiale Gleichungssysteme

Stoffeinheiten 2/5/1 - 2/5/7 Monomiale Ideale
Schwerpunkte

- Nullstellenmenge eines Ideals
- Monomiale Ideale und das dicksonsche Lemma

Stoffeinheiten 2/5/8 - 2/5/16 Monomordnungen und Division mit Rest
Schwerpunkte

- Begriff der Monomordnung, Charakterisierung und Beispiele
- Leitmonome und Leitkoeffizienten bezüglich einer Monomordnung
- Division mit Rest für Polynome in mehreren Unbestimmten

Stoffeinheiten 2/5/17 - 2/5/27 Gröbnerbasen
Schwerpunkte

- Leitideal eines Ideals bezüglich einer gegebenen Monomordnung
- Begriff der Gröbnerbasis, Beispiele
- Der hilbertsche Basissatz
- Charakterisierung von Gröbnerbasen und Church-Rosser Eigenschaft der Reste; konstruktive Überprüfung der Idealmitgliedschaft
- Das Buchberger-Kriterium und der Buchberger-Algorithmus; Beispiele

Stoffeinheiten 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen
Schwerpunkte

- Existenz und Eindeutigkeit reduzierter Gröbnerbasen, Beispiele

Stoffeinheiten 2/5/32 - 2/5/36 Ausblick auf die Eliminationstheorie
Schwerpunkte

- Eliminationsideale eines Ideals
- Gröbnerbasen von Eliminationsidealen

2.6 Symbolisches Rechnen

Stoffeinheiten 2/6/1 Erste Schritte mit dem Computer
Schwerpunkte

- Machen Sie sich mit den Internet-Seiten einiger Computeralgebrasysteme vertraut

Stoffeinheiten 2/6/2 - 2/6/4 Das Computeralgebrasystem SINGULAR
Schwerpunkte

- Rechnen mit dem Computeralgebra-System Singular

Stoffeinheiten 2/6/5 - 2/6/7 Das Multipurpose-System MuPAD
Schwerpunkte

- Rechnen mit dem Multipurpose-System MuPAD

Kapitel 3

Vektorräume

3.1 Der Begriff des Vektorraumes

Stoffeinheiten 3/1/1 - 3/1/5 Elementare Eigenschaften von Vektorräumen
Schwerpunkte

- Vektorraum, Begriff und elementare Eigenschaften; Beispiele
- Produkt von Vektorräumen; der Standardraum K^n

Stoffeinheiten 3/1/6 - 3/1/11 Homomorphismen von Vektorräumen
Schwerpunkte

- Homomorphismen, elementare Eigenschaften

- Homomorphismen und Isomorphismen der Standardräume
- Invarianz der Dimension

Stoffeinheiten 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume
Schwerpunkte

- Unterräume von Vektorräumen, Unterraumkriterium
- Summe und Durchschnitt von Unterräumen
- Bild und Kern eines Homomorphismus, erste Eigenschaften
- Die lineare Hülle einer Menge von Vektoren

Stoffeinheiten 3/1/24 - 3/1/28 Beispiel: Lineare Codes
Schwerpunkte

- Der Hamming-Abstand auf einem Standardvektorraum
- Fehlerkorrigierende Codes

3.2 Direkte Summen und Homomorphie

Stoffeinheiten 3/2/1 - 3/2/5 Innere direkte Summe
Schwerpunkte

- Innere direkte Summe von Unterräumen
- Projektionen auf direkte Summanden

Stoffeinheiten 3/2/6 - 3/2/11 Lineare Fortsetzung
Schwerpunkte

- Lineare Fortsetzung auf direkte Summen
- Direkte Summe von Homomorphismen
- Äußere direkte Summe von Vektorräumen

Stoffeinheiten 3/2/12 - 3/2/16 Der Homomorphiesatz für Vektorräume
Schwerpunkte

- Faktorraum und kanonischer Homomorphismus
- Homomorphiesatz für Vektorräume
- Erster und zweiter Isomorphiesatz

Stoffeinheiten 3/2/17 - 3/2/24 Exakte Folgen
Schwerpunkte

- Exakte Folgen von Vektorräumen, Beschreibung einiger Eigenschaften von Homomorphismen durch exakte Folgen
- Die zu einem Homomorphismus gehörige exakte Folge

- Beziehung zwischen Faktorraum und Komplementärraum
- Existenz von Komplementärräumen
- Beschreibung von Homomorphismen durch Bild, Kern und Kokern

3.3 Lineare Unabhängigkeit, Basen und Koordinatensysteme

Stoffeinheiten 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit
Schwerpunkte

- Lineare Unabhängigkeit einer Familie von Vektoren
- Beispiele linear unabhängiger Familien
- Abhängigkeit von Linearkombinationen, Koeffizientenvergleich

Stoffeinheiten 3/3/5 - 3/3/16 Basen von Vektorräumen
Schwerpunkte

- Basen eines Vektorraumes
- Zu Basen gehörige direkte Zerlegungen und Basen direkter Summen
- Basen und lineare Fortsetzung
- Koordinaten und Koordinatensysteme
- Charakterisierung von Basen
- Existenz von Basen, Basisergänzungssatz
- Klassifikation der Vektorräume

Stoffeinheiten 3/3/17 - 3/3/21 Dimension
Schwerpunkte

- Begriff der Dimension eines Vektorraumes; Beispiele
- Rang und Defekt linearer Abbildungen, Rangsatz

Stoffeinheiten 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen
Schwerpunkte

- Dimension der Summe und der direkten Summe von Unterräumen
- Rang einer linearen Abbildung endlichdimensionaler Standardräume sowie der zugehörigen Matrix
- Auswahl einer maximalen linear unabhängigen Teilmenge aus einer endlichen Menge von Vektoren im Standardraum K^n
- Ergänzung einer linear unabhängigen Teilmenge einer Menge von Vektoren im Standardraum K^n zu einer Basis bzw. noch allgemeiner:
- Für eine gegebene Basis $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ im Standardraum K^n und eine Menge $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r\}$ linear unabhängiger Vektoren sind r der Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ durch die Vektoren $\boldsymbol{w}_j$ so zu ersetzen, dass wiederum eine Basis entsteht (Austauschverfahren).

Stoffeinheiten 3/3/27 Beispiel: Fibonaccizahlen
Schwerpunkte

- Der Vektorraum der Fibonaccifolgen
- Auffinden einer Basis des Raumes der Fibonaccifolgen, Formel für die Folgenglieder

Stoffeinheiten 3/3/28 Beispiel: Magische Matrizen
Schwerpunkte

- Der Vektorraum der magischen 3×3-Matrizen
- Bestimmung einer Basis des Raumes der magischen 3×3-Matrizen

Stoffeinheiten 3/3/29 Beispiel: Entschlüsselung von Hill - Ciphern
Schwerpunkte

- Auffinden einer invertierbaren Matrix über $\mathbb{F}_{29}$, mit der ein Text nach dem Verfahren der Hill-Ciphern verschlüsselt wurde

3.4 Basiswechsel

Stoffeinheiten 3/4/1 - 3/4/8 Die Matrix einer linearen Abbildung
Schwerpunkte

- Matrix einer linearen Abbildung bezüglich gegebener Basen; Koordinaten der Bildvektoren
- Übergangsmatrix zwischen Basen eines Vektorraumes; Bestimmung der Übergangsmatrix für Basen des Standardraumes K^n
- Funktorialität der zugeordneten Matrix
- Die lineare Abbildung zu einer gegebenen Matrix

Stoffeinheiten 3/4/9 - 3/4/12 Variation der Basen
Schwerpunkte

- Umrechnung der Matrix einer linearen Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$ bezüglich gegebener Paare von Basen (Basiswechsel)
- Bestimmung von Basen für $\mathrm{im}(\varphi)$ und $\ker(\varphi)$ zu einer durch ihre Matrix gegebenen linearen Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$
- Bestimmung von Basen für K^n und K^m, für die eine gegebene lineare Abbildung $\varphi : K^n \to K^m$ eine Matrix $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt
- Begriff der Ähnlichkeit quadratischer Matrizen

3.5 Dualität

Stoffeinheiten 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung
Schwerpunkte

- Definition des dualen Vektorraumes und der kanonischen Paarung
- Bestimmung dualer Basen zu gegebenen Basen des Standardraumes
- Bestimmung eines Gleichungssystems, dessen Lösungsmenge ein gegebener Unterraum des Standardraumes ist

Stoffeinheiten 3/5/12 - 3/5/17 Duale Abbildungen und Kofunktorialität
Schwerpunkte

- Die duale einer linearen Abbildung, Kofunktorialität und die zugehörige Matrix
- Kanonischer Homomorphismus eines Vektorraumes in seinen bidualen
- Kanonische Isomorphie von V und V^* im Fall $\dim(V) < \infty$

Kapitel 4

Multilineare Abbildungen

4.1 Einführung

Stoffeinheiten 4/1/1 - 4/1/2 Der Vektorraum der p-linearen Abbildungen
Schwerpunkte

- Der Begriff der p-linearen Abbildung
- Beispiele p-linearer Abbildungen

Stoffeinheiten 4/1/3 - 4/1/5 Symmetrische, schiefsymmetrische und alternierende multilineare Abbildungen
Schwerpunkte

- Der Begriff der symmetrischen, schiefsymmetrischen bzw. alternierenden p-linearen Abbildung

4.2 Determinanten

Stoffeinheiten 4/2/1 - 4/2/9 Der Hauptsatz der Determinantentheorie
Schwerpunkte

- Begriff der Determinantenfunktion
- Existenz und Eindeutigkeit der Determinantenfunktion zu einer gegebenen Basis
- Determinante einer Matrix

- Erste Eigenschaften der Determinante, leibnizsche Formel
- Determinantenfunktionen und Basiswechsel

Stoffeinheiten 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten
Schwerpunkte

- Der Multiplikationssatz für Determinanten
- Determinante einer Blockmatrix
- Formel für die inverse Matrix
- Laplacescher Entwicklungssatz
- Cramersche Regel

Stoffeinheiten 4/2/19 - 4/2/20 Rangbestimmung mit Unterdeterminanten
Schwerpunkte

- Rangbestimmung für Matrizen mittels Unterdeterminanten

Stoffeinheiten 4/2/21 - 4/2/25 Die Determinante eines Endomorphismus
Schwerpunkte

- Invarianz der Determinante gegenüber Ähnlichkeitstransformationen und Determinante eines Endomorphismus
- Orientierungserhaltende Endomorphismen reeller Standardräume; gleichorientierte Basen

Stoffeinheiten 4/2/26 - 4/2/28 Determinanten über kommutativen Ringen
Schwerpunkte

- Identitätssatz für Polynome mehrerer Unbestimmter über einem unendlichen Körper
- Übertragung einiger Determinanteneigenschaften auf Matrizen über einem kommutativen Ring

4.3 Bilinearformen und quadratische Formen

Stoffeinheiten 4/3/1 - 4/3/4 Die Matrix einer Bilinearform
Schwerpunkte

- Duale Paarungen
- Matrix einer Bilinearform, elementare Eigenschaften und Basiswechsel

Stoffeinheiten 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen
Schwerpunkte

- Symmetrische Bilinearformen und quadratische Formen, symmetrischer gaußscher Algorithmus

- Äquivalenz quadratischer Formen, Klassifikation über den reellen und komplexen Zahlen
- Determinantenkriterium für positive Definitheit

Stoffeinheiten 4/3/17 - 4/3/20 Alternierende Bilinearformen
Schwerpunkte

- Symplektische Basen und Klassifikation alternierender Formen

4.4 Tensorprodukte

Stoffeinheiten 4/4/1 - 4/4/8 Das klassifizierende Objekt bilinearer Abbildungen
Schwerpunkte

- Tensorprodukt von Vektorräumen, Universaleigenschaft und Existenz
- Elementare Rechenregeln für Tensoren, Auffinden einer Basis des Tensorprodukts, einige Isomorphismen
- Bifunktorialität des Tensorprodukts

Stoffeinheiten 4/4/9 - 4/4/10 Skalarerweiterung
Schwerpunkte

- Wechsel des Grundkörpers durch das Tensorprodukt mit einem Erweiterungskörper

Stoffeinheiten 4/4/11 - 4/4/12 Kroneckerprodukt von Matrizen
Schwerpunkte

- Das Tensorprodukt (Kroneckerprodukt) von Matrizen und seine Eigenschaften

4.5 Tensoralgebra

Stoffeinheiten 4/5/1 - 4/5/5 Mehrfache Tensorprodukte
Schwerpunkte

- p-lineare Abbildungen und p-fache Tensorprodukte
- Die Tensorpotenzen eines Vektorraumes, Funktorialität
- Die Tensoralgebra eines Vektorraumes; Universalität und funktorielle Eigenschaften

Stoffeinheiten 4/5/6 - 4/5/8 Symmetrische und äußere Potenzen
Schwerpunkte

- Symmetrische und äußere Potenzen von Vektorräumen
- Funktorialität der symmetrischen und äußeren Potenzen
- Anwendung: Determinante eines Endomorphismus

Stoffeinheiten 4/5/9 - 4/5/18 Symmetrische Algebra und äußere Algebra
Schwerpunkte

- Konstruktion der symmetrischen und der äußeren Algebra; funktorielle Eigenschaften

- Charakterisierung der symmetrischen Algebra
- Dimensionen der symmetrischen und der äußeren Potenzen
- Äußere Potenz einer Matrix; Eigenschaften

Stoffeinheiten 4/5/19 - 4/5/23 Klassische Tensorrechnung
Schwerpunkte

- Gemischte Tensoren (p, q)-ter Stufe auf einem endlichdimensionalen Vektorraum
- Tensorprodukt, Koordinatentransformation und Dualität für gemischte Tensoren

Kapitel 5

Endomorphismen von Vektorräumen

5.1 Eigenwerte und charakteristisches Polynom

Stoffeinheiten 5/1/1 - 5/1/3 Eigenwerte und Eigenvektoren
Schwerpunkte

- Eigenwerte und Eigenvektoren eines Endomorphismus
- Eigenräume eines Endomorphismus

Stoffeinheiten 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom
Schwerpunkte

- Charakteristische Gleichung und charakteristisches Polynom; Bestimmung von Eigenwerten und Eigenräumen
- Charakteristische Polynome direkter Summen von Endomorphismen
- Begleitmatrix eines normierten Polynoms

5.2 Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierung

Stoffeinheiten 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus
Schwerpunkte

- Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus bzw. einer Matrix
- Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines Endomorphismus
- Algebraische und geometrische Multiplizität von Eigenwerten
- Diagonalisierbarkeit – Kriterien und Auffinden einer Diagonalform in der Ähnlichkeitsklasse einer diagonalisierbaren Matrix; Spektralzerlegung eines Endomorphismus

Stoffeinheiten 5/2/8 - 5/2/12 Halbeinfache Endomorphismen
Schwerpunkte

- Halbeinfache Matrizen und halbeinfache Endomorphismen
- Simultane Diagonalisierbarkeit
- Invariante Unterräume

Stoffeinheiten 5/2/13 - 5/2/17 Trigonalisierung
Schwerpunkte

- Fahnen eines Vektorraumes
- Invariante Fahnen und trigonalisierbare Endomorphismen
- Charakterisierung trigonalisierbarer Endomorphismen bzw. Matrizen
- Trigonalisierung einer Matrix, Existenz und rechnerische Ausführung

5.3 Nilpotente Endomorphismen

Stoffeinheiten 5/3/1 - 5/3/7 Charakterisierung nilpotenter Endomorphismen
Schwerpunkte

- Charakterisierung nilpotenter Endomorphismen und (entsprechend) nilpotenter Matrizen
- Klassifikation der nilpotenten Endomorphismen
- Zyklische Unterräume und zyklische Vektoren

Stoffeinheiten 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix
Schwerpunkte

- Partitionen und Ähnlichkeitsklassen nilpotenter Matrizen
- Rechnerische Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

5.4 Die jordansche Normalform

Stoffeinheiten 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus
Schwerpunkte

- Höhere Eigenräume eines Endomorphismus und Hauptraumzerlegung
- Der Satz von Cayley-Hamilton und das Minimalpolynom eines Endomorphismus
- Existenz und Eindeutigkeit der jordanschen Normalform eines Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt
- Rechnerische Bestimmung der jordanschen Normalform einer Matrix

Stoffeinheiten 5/4/14 - 5/4/24 Elementarteiler
Schwerpunkte

- Präsentationsmatrix eines Endomorphismus
- Determinantenteiler und Elementarteiler eines Endomorphismus
- Teilbarkeitseigenschaften der Elementarteiler; jordansche Normalform und Elementarteiler bestimmen sich gegenseitig
- Smithsche Normalform (rechnerische Bestimmung der Elementarteiler)

Stoffeinheiten 5/4/25 - 5/4/28 Ähnlichkeit über dem Grundkörper
Schwerpunkte

- Charakterisierung der Ähnlichkeit von Matrizen durch Übereinstimmung ihrer jordanschen Normalformen nach Skalarerweiterung bzw. durch Äquivalenz der charakteristischen Matrizen

5.5 Normalformen über dem Grundkörper

Stoffeinheiten 5/5/1 - 5/5/4 Primärzerlegung eines Endomorphismus
Schwerpunkte

- Primärzerlegung eines Endomorphismus
- Eindeutigkeit der Jordanzerlegung eines Endomorphismus bzw. der Jordanzerlegung einer Matrix

Stoffeinheiten 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen
Schwerpunkte

- Existenz der Jordanzerlegung eines Endomorphismus über den reellen (und den komplexen) Zahlen

Stoffeinheiten 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform
Schwerpunkte

- Elementarteiler der Begleitmatrix eines normierten Polynoms
- Natürliche Form einer Matrix und ihre rechnerische Bestimmung
- Primäre Elementarteiler und rationale Normalform
- Klassische Normalform einer Matrix für beliebige Grundkörper

Kapitel 6

Geometrie

6.1 Affine Räume

Stoffeinheiten 6/1/1 - 6/1/4 Definition des affinen Raumes

Schwerpunkte

- Der Begriff des affinen Raumes
- Beispiele affiner Räume

Stoffeinheiten 6/1/5 - 6/1/9 Affine Abbildungen

Schwerpunkte

- Affine Abbildungen und die zugehörigen linearen Abbildungen der Translationsräume
- Erste Eigenschaften affiner Abbildungen
- Die affine Gruppe

Stoffeinheiten 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Schwerpunkte

- Der Begriff des affinen Unterraumes
- Affine Unterräume des Standardraumes als Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme
- Lagebeziehungen von Unterräumen
- Durchschnitt affiner Unterräume und Verbindungsraum einer Menge von Punkten
- Dimension des Verbindungsraumes zweier affiner Unterräume

Stoffeinheiten 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Schwerpunkte

- Affin unabhängige Familien von Punkten
- Existenz affiner Basen
- Affine Fortsetzung und affine Koordinatensysteme; Bestimmung affiner Koordinaten
- Affine Koordinatentransformation in $K[X_1, \ldots, X_n]$

Stoffeinheiten 6/1/28 - 6/1/30 Affine Quadriken

Schwerpunkte

- Affine Hauptachsenpolynome reeller und komplexer Quadriken

- Auffinden des Hauptachsenpolynoms einer affinen Quadrik durch quadratische Ergänzung

Stoffeinheiten 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen
Schwerpunkte

- Die Fixpunktmengen affiner Abbildungen eines affinen Raumes in sich
- Parallelprojektion eines Unterraumes auf einen anderen

6.2 Euklidische und unitäre Räume

Stoffeinheiten 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen
Schwerpunkte

- Sesquilinearformen und hermitesche Formen; positive Definitheit
- Begriff des unitären Vektorraumes; elementare Eigenschaften der Norm
- Winkel zwischen Vektoren eines euklidischen Vektorraumes

Stoffeinheiten 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung
Schwerpunkte

- Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt
- Orthogonales Komplement eines Unterraumes
- Koordinaten bezüglich Orthonormalbasen (parsevalsche Gleichung und besselsche Ungleichung)

Stoffeinheiten 6/2/15 - 6/2/16 Euklidische affine Räume
Schwerpunkte

- Begriff des euklidischen affinen Raumes
- Durch die Norm des Translationsraumes definierte Metrik eines affinen euklidischen Raumes
- Orthonormale Koordinatensysteme in euklidischen affinen Räumen

Stoffeinheiten 6/2/17 - 6/2/22 Abstand von Unterräumen
Schwerpunkte

- Orthogonale Projektion auf einen affinen Unterraum
- Abstand zweier affiner Unterräume
- Die hessesche Normalform und ihre Verallgemeinerung

Stoffeinheiten 6/2/23 - 6/2/26 Ausgleichsrechnung
Schwerpunkte

- Lösungen inkonsistenter linearer Gleichungssysteme im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate

- Zu einem linearen Gleichungssystem gehöriges normales System
- Approximation von Funktionen durch ausgleichende Polynome

Stoffeinheiten 6/2/27 - 6/2/32 Volumen
Schwerpunkte

- Determinantenfunktion und Volumen, Gramsche Determinante
- Orientierter Winkel zwischen zwei Vektoren in der orientierten euklidischen Ebene

Stoffeinheiten 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt
Schwerpunkte

- Elementare Eigenschaften des Vektorprodukts in einem orientierten dreidimensionalen euklidischen Raum
- Koordinaten des Vektorprodukts und Konstruktion von Basen
- Formeln für das Vektorprodukt und Anwendungen (Jacobi-Identität, Abstand von Geraden, plückersche Geradengleichung)

6.3 Spektralzerlegung normaler Operatoren

Stoffeinheiten 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus
Schwerpunkte

- Der Adjungierte eines Endomorphismus unitärer Vektorräume
- Elementare Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus
- Spektralsatz für selbstadjungierte Endomorphismen und praktische Ausführung der Spektralzerlegung
- Unitäre Automorphismen

Stoffeinheiten 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren
Schwerpunkte

- Cartan-Zerlegung eines Endomorphismus
- Der Spektralsatz für normale Operatoren (komplexer Fall) und Anwendung auf die Klassifikation normaler Operatoren euklidischer Räume

Stoffeinheiten 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen
Schwerpunkte

- Typen orthogonaler Endomorphismen euklidischer Vektorräume
- Klassifikation orthogonaler Endomorphismen in den Dimensionen $2, 3$

Stoffeinheiten 6/3/16 - 6/3/17 Affine Isometrien
Schwerpunkte

- Isometrien euklidischer affiner Räume

- Klassifikation der Isometrien euklidischer affiner Räume in den Dimensionen 2 und 3

Stoffeinheiten 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken
Schwerpunkte

- Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken
- Rechnerische Bestimmung der metrischen Typen von Quadriken und Veranschaulichung in den Dimensionen 2 und 3

Stoffeinheiten 6/3/21 - 6/3/26 Polare Zerlegung eines Automorphismus
Schwerpunkte

- Positive und semipositive Endomorphismen unitärer Vektorräume
- Die Wurzel aus einem semipositiven Endomorphismus
- Polare Zerlegung eines Automorphismus und rechnerische Bestimmung der polaren Zerlegung einer regulären Matrix

6.4 Lineare dynamische Systeme

Stoffeinheiten 6/4/1 - 6/4/7 Begriff des dynamischen Systems
Schwerpunkte

- Begriff des dynamischen Systems, Beispiele
- Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Lösungen linearer Differenzialgleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Stoffeinheiten 6/4/8 - 6/4/13 Norm eines Endomorphismus
Schwerpunkte

- Norm eines Endomorphismus bzw. einer Matrix
- Grenzwert einer Folge von Endomorphismen
- Vollständigkeit von $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n)$
- Rechnen mit konvergenten Reihen von Endomorphismen

Stoffeinheiten 6/4/14 - 6/4/15 Das Exponential
Schwerpunkte

- Exponential eines Endomorphismus bzw. einer Matrix
- Bestimmung des Exponentials für nilpotente und für diagonalisierbare Matrizen

Stoffeinheiten 6/4/16 - 6/4/21 Homogene lineare Differenzialgleichungssysteme
Schwerpunkte

- Lösungen homogener linearer Differenzialgleichungssysteme (komplexer und reeller Fall)

- Produktzerlegung eines linearen dynamischen Systems mittels Jordanzerlegung der zugehörigen Matrix

Stoffeinheiten 6/4/22 - 6/4/24 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Schwerpunkte

- Lineare Differenzialgleichungen n-ter Ordnung; Zurückführung auf Systeme erster Ordnung (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, Bestimmung einer Basis des Lösungsraumes)

Teil II: Die Aufgaben

Aufgaben zum Kapitel 0

Aufgabe 0/1/010
Mengenoperationen (1)

Index: Differenz von Mengen, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen

Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

A, B, C seien Mengen. Beweisen Sie:
(1) $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$,
(2) $A \setminus (B \cap B) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
(3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \cap (A \setminus C)$,
(4) Ist $A \cup B = A \cup C$ und $A \cap B = A \cap C$, so gilt $B = C$.

Aufgabe 0/1/020
Mengenoperationen (2), Komplementärmengen

Index: Differenz von Mengen, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen, Komplement von Mengen

Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ bezeichne $\mathrm{C}_M(X)$ das Komplement von X in M. Zeigen Sie, dass für beliebige Teilmengen X, Y, $Z \subseteq M$ gilt:
(1) $\mathrm{C}_M(X \cup Y) = \mathrm{C}_M(X) \cap \mathrm{C}_M(Y)$,
(2) $\mathrm{C}_M(X \cap Y) = \mathrm{C}_M(X) \cup \mathrm{C}_M(Y)$,
(3) $\mathrm{C}_M(X) \setminus Y = \mathrm{C}_M(X \cup Y)$,
(4) $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap \mathrm{C}_M(Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$
$\qquad = X \cap \mathrm{C}_M(Y) \cap \mathrm{C}_M(Z)$.

Aufgabe 0/1/030
Mengenoperationen (3)

Index: Komplement von Mengen, Durchschnitt eines Mengensystems, Vereinigung eines Mengensystems

Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Es sei M eine Menge. Für $X \subseteq M$ bezeichne $\mathrm{C}_M(X)$ das Komplement von X in M. Weiter sei $S = \{X_i \,|\, i \in I\}$ ein System von Mengen mit $X_i \subseteq M$. Zeigen Sie:

(1) $\mathrm{C}_M\Big(\bigcup\limits_{i\in I} X_i\Big) = \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{C}_M(X_i)$,

(2) $\mathrm{C}_M\Bigl(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\Bigr) = \bigcup\limits_{i\in I}\mathrm{C}_M(X_i)$.

Aufgabe 0/1/040
Durchschnitt eines Mengensystems

Index: Komplement von Mengen, Durchschnitt eines Mengensystems, Vereinigung eines Mengensystems, leere Menge

Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Es sei $M = \{X_i \,|\, i \in I\}$ ein System von Mengen mit der Eigenschaft $\bigcap\limits_{i\in I} X_i = \emptyset$. Beweisen oder widerlegen Sie durch Angabe eines Gegenbeispiels: Es gibt Mengen $X_i,\, X_j \in M$, so dass $X_i \cap X_j = \emptyset$.

Aufgabe 0/1/050
Mengenoperationen, kartesisches Produkt

Index: kartesisches Produkt, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen

Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Zeigen Sie, dass für Mengen A, B, C, D stets gilt:
(1) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
(2) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
(3) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
(4) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$, (!)
(5) $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$.

Aufgabe 0/1/060
Potenzmengen

Index: Potenzmenge

Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

Bestimmen Sie die folgenden Potenzmengen:
(1) $\mathrm{Pot}(\{\emptyset\})$, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\{\emptyset\}))$, $\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\mathrm{Pot}(\emptyset)))$,
(2) die Potenzmenge der Menge $\mathrm{Pot}(\{2, 3\})$.

Aufgabe 0/1/070
Potenzmengen und Mengenoperationen

Index: Potenzmenge, Durchschnitt zweier Mengen, Vereinigung zweier Mengen, Teilmengenbeziehung

Stoffeinheiten: 0/1/1 - 0/1/15 Mengen

A und B seien Mengen. Zeigen Sie:
(1) $\mathrm{Pot}(A) \cap \mathrm{Pot}(B) = \mathrm{Pot}(A \cap B)$.
(2) Wenn $A \subseteq B$, so $\mathrm{Pot}(A) \subseteq \mathrm{Pot}(B)$.

(3) $\operatorname{Pot}(A) \cup \operatorname{Pot}(B) \subseteq \operatorname{Pot}(A \cup B)$ (wann gilt Gleichheit?)

Aufgabe 0/2/010 (S: Varianten)
Wahrheitswerte (1)

Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

A, B, C, D, E, J, K, L, seien Aussagen. Entscheiden Sie, welchen Wahrheitswert die Aussagenverbindung

$$\Phi : \ (\neg J \wedge K) \vee \Big((((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow D) \wedge (E \vee L) \Big)$$

hat, wenn die Wahrheitswerte der Grundaussagen durch die folgende Tabelle gegeben sind.

A	B	C	D	E	J	K	L
W	F	F	F	F	F	F	W

Ergebnis. Φ hat den Wahrheitswert F .

Aufgabe 0/2/011 (S: Varianten)
Wahrheitswerte (2)

Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

A, B, C und D seien Aussagen. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagenverbindung

$$\Phi := \ (D \Rightarrow A) \wedge (\neg C \vee B),$$

wenn die Wahrheitswerte der Grundaussagen A, $B, \ldots$ durch die folgende Tabelle gegeben sind.

A	B	C	D
W	W	W	W

Ergebnis. Wir setzen $\varphi := D \Rightarrow A$, $\psi := \neg C \vee B$ und erhalten leicht die Wahrheitswerte für φ, ψ und Φ, die in der nachfolgenden Tafel angegeben sind.

φ	ψ	Φ
W	W	W

Aufgabe 0/2/012 (S: Varianten)
Wahrheitswerte (3)

Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

A, B, C, D, U, V, H seien Aussagen. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagenverbindung

$$\Phi := \ (A \Rightarrow D) \wedge (\neg B \vee V),$$

wenn die Wahrheitswerte der Grundaussagen A, $B, \ldots$ durch die folgende Tabelle gegeben sind.

A	B	C	D	E	U	V	H
F	W	W	W	W	F	F	W

Ergebnis. Selbstverständlich hängt das Ergebnis nur von denjenigen Aussagen ab, die in der Aussagenverbindung Φ auftreten. Wir setzen $\varphi := A \Rightarrow D$, $\psi := \neg B \vee V$ und erkennen leicht die Wahrheitswerte für φ, ψ und Φ, die in der nachfolgenden Tafel angegeben sind.

φ	ψ	Φ
W	F	F

Aufgabe 0/2/013 (S: Varianten)
Wahrheitswerte (4)

Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

A, B, C, D, E, U, V, H seien Aussagen. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagenverbindung

$$\Phi := ((U \Rightarrow A) \wedge (\neg E \vee C)) \vee ((D \Rightarrow B) \wedge (V \Rightarrow \neg H)),$$

wenn die Wahrheitswerte der Grundaussagen A, $B, \ldots$ durch die folgende Tabelle gegeben sind.

A	B	C	D	E	U	V	H
W	W	W	F	F	W	W	W

Ergebnis. Wir setzen $\alpha_1 = U \Rightarrow A$, $\alpha_2 = \neg E \vee C$, $\alpha_3 = D \Rightarrow B$, $\alpha_4 = V \Rightarrow \neg H$, $\alpha_5 = (U \Rightarrow A) \wedge (\neg E \vee C)$, $\alpha_6 = (D \Rightarrow B) \wedge (V \Rightarrow \neg H)$. Nun ist zu sehen, dass die Wahrheitswerte für die Aussagen α_i und damit auch für Φ durch die folgende Tafel gegeben sind.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	Φ
W	W	W	F	W	F	W

Aufgabe 0/2/014 (S: Varianten)
Wahrheitswerte (5)

Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

A, B, C und D seien Aussagen. Bestimmen Sie den Wahrheitswert der Aussagenverbindung

$$\Phi := (C \vee A) \wedge (\neg B \Rightarrow D)$$

für alle möglichen Wahrheitswerte der Grundaussagen A, B, C und D.

Ergebnis. Wir setzen $\varphi := C \vee A$, $\psi := \neg B \Rightarrow D$ und erhalten leicht die Wahrheitswerte für φ, ψ und Φ, die in der nachfolgenden Tafel angegeben sind.

A	B	C	D	φ	ψ	Φ
W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	F	W	W	W
W	W	F	W	W	W	W
W	F	W	W	W	W	W
F	W	W	W	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	W	F
F	W	W	F	W	W	W
W	F	F	W	W	W	W
W	F	W	F	W	F	F
W	W	F	F	W	W	W
F	F	F	W	F	W	F
F	F	W	F	W	F	F
F	W	F	F	F	W	F
W	F	F	F	W	F	F
F	F	F	F	F	F	F

Aufgabe 0/2/015 (S: Varianten)
Wahrheitswerte (6)

Index: Wahrheitswert, klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

A, B, C und D seien Aussagen. Wir setzen

$$\Phi := (B \wedge A) \Rightarrow (\neg C \vee D)\,, \quad \varphi := B \wedge A\,, \quad \psi := \neg C \vee D.$$

Bestimmen Sie zu allen möglichen Wahrheitswerten der Grundaussagen A, B, C und D den Wahrheitswert für Φ, indem Sie die folgende Tabelle ergänzen.

A	B	C	D	φ	ψ	Φ
W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	F			
W	W	F	W	W	W	W
W	F	W	W			
F	W	W	W			
F	F	W	W			
F	W	F	W	F	W	W
F	W	W	F			
W	F	F	W			
W	F	W	F			
W	W	F	F			
F	F	F	W	F	W	W
F	F	W	F			
F	W	F	F			
W	F	F	F	F	W	W
F	F	F	F	F	W	W

Ergebnis. Die vervollständigte Tabelle sieht so aus:

A	B	C	D	φ	ψ	Φ
W	W	W	W	W	W	W
W	W	W	F	W	F	F
W	W	F	W	W	W	W
W	F	W	W	F	W	W
F	W	W	W	F	W	W
F	F	W	W	F	W	W
F	W	F	W	F	W	W
F	W	W	F	F	F	W
W	F	F	W	F	W	W
W	F	W	F	F	F	W
W	W	F	F	W	W	W
F	F	F	W	F	W	W
F	F	W	F	F	F	W
F	W	F	F	F	W	W
W	F	F	F	F	W	W
F	F	F	F	F	W	W

Aufgabe 0/2/020
Äquivalenz von Aussagen (1)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, Äquivalenz von Aussagen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Untersuchen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen, ob folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) $A \Leftrightarrow B$; $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$,

(2) $A \Rightarrow B$; $B \Rightarrow A$,

(3) $A \Rightarrow B$; $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Aufgabe 0/2/030
Äquivalenz von Aussagen (2)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, Abtrennungsregel, Kettenschluss, Kontraposition, indirekter Beweis, Beweisprinzipien

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gültig sind:

(1) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (Abtrennungsregel),

(2) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (Kettenregel),

(3) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontraposition),

(4) $(\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$ (eine Form des indirekten Beweises).

Aufgabe 0/2/040
Aussagenverbindungen (1)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, Implikation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

A, B, C seien Aussagenvariablen. Stellen Sie Wahrheitswerttabellen für folgende Ausdrücke auf:

(1) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow B \wedge C))$,

(2) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$,

(3) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$,

(4) $(A \vee B) \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Aufgabe 0/2/050
Aussagenverbindungen (2)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Implikation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

$A_1, \ldots, A_n$ seien Ausdrücke und B sei ein gültiger Ausdruck.

(1) Zeigen Sie, dass $A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (A_n \Rightarrow B) \ldots)$ und $\neg B \Rightarrow (A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \ldots))$ gültig sind.

(2) Für welche n ist $\underbrace{(\ldots(((A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \Rightarrow A) \ldots) \Rightarrow A}_{n \text{ Pfeile}}$ gültig?

Aufgabe 0/2/060
Aussagenverbindungen (3)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Äquivalenz von Aussagen

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Ersetzen Sie den Ausdruck $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow B))$ äquivalent durch einen, in dem höchstens noch $\neg$ und $\wedge$ als logische Zeichen vorkommen.

Aufgabe 0/2/070
Aussagenverbindungen (4)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Negation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Bilden Sie die Negation der folgenden Ausdrücke, so dass $\neg$ höchstens noch vor den Aussagenvariablen A, B, C, D, E vorkommt!

(1) $A \vee (B \wedge C)$,

(2) $A \vee (B \Rightarrow ((C \Rightarrow D) \vee E))$,

(3) $\neg A \Leftrightarrow (B \vee C)$,

(4) $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)$,

(5) $(A \Rightarrow \neg B) \vee (\neg A \Rightarrow B)$,

(6) $(A \wedge B) \Leftrightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (B \wedge C))$.

Aufgabe 0/2/080

Aussagenverbindungen (5)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Wahrheitswerttabelle, indirekter Beweis

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Untersuchen Sie mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen, ob die folgenden Aussagen gültig sind:

(1) $(\neg A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$ (eine Form des indirekten Beweises),

(2) $\neg(A \wedge B) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B)$,

(3) $(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C))$.

Aufgabe 0/2/090

Aussagenverbindungen (6)

Index: klassische Aussagenverbindungen, Äquivalenz von Aussagen, Negation

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Überprüfen Sie die Gültigkeit der angegebenen Äquivalenzen, wobei φ, ψ, χ beliebige Ausdrücke sind.

(1) Assoziativität

$$\begin{aligned} \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) &\iff (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi, \\ \varphi \vee (\psi \vee \chi) &\iff (\varphi \vee \psi) \vee \chi. \end{aligned}$$

(2) Idempotenz

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \varphi &\iff \varphi, \\ \varphi \vee \varphi &\iff \varphi. \end{aligned}$$

(3) Kommutativität

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &\iff \psi \wedge \varphi, \\ \varphi \vee \psi &\iff \psi \vee \varphi, \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\iff \psi \leftrightarrow \varphi. \end{aligned}$$

(4) Definierbarkeit

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &\iff \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi), \\ \varphi \vee \psi &\iff \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \\ \varphi \Rightarrow \psi &\iff \neg\varphi \vee \psi, \\ \varphi \leftrightarrow \psi &\iff (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi). \end{aligned}$$

(5) Distributivität

$$\begin{aligned} \varphi \wedge (\psi \vee \chi) &\iff (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi), \\ \varphi \vee (\psi \wedge \chi) &\iff (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi), \\ \varphi \Rightarrow (\psi \wedge \chi) &\iff (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\varphi \Rightarrow \chi), \\ \varphi \Rightarrow (\psi \vee \chi) &\iff (\varphi \Rightarrow \psi) \vee (\varphi \Rightarrow \chi). \end{aligned}$$

(6) Negation

$$\begin{aligned} \neg(\neg\varphi) &\iff \varphi, \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\iff \neg\varphi \vee \neg\psi, \\ \neg(\varphi \vee \psi) &\iff \neg\varphi \wedge \neg\psi, \\ \neg(\varphi \Rightarrow \psi) &\iff \varphi \wedge \neg\psi, \\ \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) &\iff (\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\neg\varphi \wedge \psi). \end{aligned}$$

Aufgabe 0/2/100

Binomialkoeffizienten

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Für natürliche Zahlen $k \leq n$ setzen wir $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$, wobei $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ist. Die Zahl $\binom{n}{k}$ heißt *Binomialkoeffizient*.

Zeigen Sie:

(1) Für $k < n$ gilt: $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ und $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(2) Es ist stets $\binom{2n}{n} \geq 2^n$.

(3) Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen.

Aufgabe 0/2/110
Potenzmenge, Anzahl der Elemente

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung, Potenzmenge

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Es sei n eine natürliche Zahl und M eine n-elementige Menge.
Zeigen sie, dass $\mathrm{Pot}(M)$ genau 2^n Elemente enthält.

Aufgabe 0/2/120
Vollständige Induktion (1)

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für natürliche Zahlen $n \geq 1$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

(a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

(b) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Aufgabe 0/2/130
Vollständige Induktion (2)

Index: vollständige Induktion, Induktionsaxiom, Induktionsschritt, Induktionsbehauptung, Anfangsschritt, Induktionsvoraussetzung

Stoffeinheiten: 0/2/1 - 0/2/7 Logische Grundbegriffe

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

(1) Wenn $n \geq 1$ so ist $4^n + 15n - 1$ durch 9 teilbar.

(2) Für $n > 3$ ist $2^n + 1 > n^2$.

Aufgabe 0/3/010
Potenzmenge und charakteristische Funktion

Index: bijektive Abbildung, Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Für jede Menge M ist durch

$$\mathrm{Char}_M(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in M, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die *charakteristische Abbildung von* M definiert.
Zeigen Sie, dass $X \mapsto \mathrm{Char}_X$ mit $X \subseteq M$ eine Bijektion zwischen $\mathrm{Pot}(M)$ und $\mathrm{Abb}(M, 2)$ ist.

Aufgabe 0/3/020
Relationen, Beispiele (1)

Index: Relation, Eigenschaften von Relationen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Geben Sie in der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ Relationen R_1, $R_2\, R_3$ und R_4 an, für die gilt:

(1) R_1 ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch.

(2) R_2 ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv.

(3) R_3 ist transitiv, symmetrisch und nicht reflexiv.

(4) R_4 ist transitiv, symmetrisch und reflexiv.

Aufgabe 0/3/030
Relationen, Beispiele (2)

Index: Relation, Eigenschaften von Relationen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Geben Sie jeweils eine nichtleere Menge A und eine Relation $R \subseteq A \times A$ mit den folgenden Eigenschaften an:

(1) R ist reflexiv, symmetrisch und nicht transitiv,

(2) R symmetrisch, nicht reflexiv und nicht transitiv,

(3) R ist reflexiv, transitiv und nicht symmetrisch,

(4) R ist irreflexiv, antisymmetrisch und transitiv,

(5) R ist reflexiv, transitiv und nicht antisymmetrisch.

Aufgabe 0/3/040
Differenzengleichheit auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Index: Differenzengleichheit, Äquivalenzrelation, Relation

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Man beweise folgende Behauptungen:

(1) Die in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierte Relation $(m, n) \sim (k, l) \iff m + l = n + k$ ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Ist $(m,n) +_p (k,l) := (m+k, n+l)$
und $(m,n) \cdot_p (k,l) := (m\cdot k + n\cdot l, m\cdot l + n\cdot k)$,
dann sind $+_p$, $\cdot_p$ assoziativ und kommutativ und es gilt das Distributivgesetz.

Aufgabe 0/3/050
Operationen rationaler Zahlen

Index: Quotientengleicheit, Äquivalenzrelation, Relation, Repräsentantenunabhängigkeit

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Beweisen Sie folgende Behauptungen:

(1) Die in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definierte Relation $(a,b) \sim (c,d) \iff a\cdot d = b\cdot c$ ist eine Äquivalenzrelation.

(2) Die Vorschriften $(a,b) +_q (c,d) := (a\cdot d + b\cdot c, b\cdot d)$ und $(a,b) \cdot_q (c,d) := (a\cdot c, b\cdot d)$ sind auf den Klassen der obigen Relation wohldefiniert, d.h. die Klasse der rechten Seite ist jeweils unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der auf der linken Seite auftretenden Paare.

Aufgabe 0/3/060
Lexikographische Ordnung

Index: Ordnung, lexikographische Ordnung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Geben sie die lexikographische Ordnung auf M^3 an, wenn M die Teilmenge $M = \{2,3,5\}$ der natürlichen Zahlen (mit der üblichen Ordnung) bezeichnet.

Aufgabe 0/3/070
Abbildungen, Wertetafeln

Index: Abbildung, Wertetafel einer Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Geben Sie alle Abbildungen $f : \{0,1\} \to \{0,1,2\}$ durch ihre Wertetafeln an. Welche dieser Abbildungen sind injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

Aufgabe 0/3/080
Eigenschaften von Abbildungen (1)

Index: Abbildung, Eigenschaften von Abbildungen, Komposition von Abbildungen, injektive Abbildung, surjektive Abbildung, Produkt von Abbildungen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

f und g seien Abbildungen, für die $f \circ g$ definiert ist. Beweisen Sie:

(1) Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch f surjektiv.

(2) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch g injektiv.

(3) Gilt unter (1) bzw. (2) die Behauptung auch für die jeweils andere Abbildung g bzw. f?

Aufgabe 0/3/090
Eigenschaften von Abbildungen (2)

Index: Abbildung, Eigenschaften von Abbildungen, Komposition von Abbildungen, injektive Abbildung, bijektive Abbildung, Produkt von Abbildungen, Umkehrabbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(1) Ist $f : A \to B$ bijektiv, dann ist auch $f^{-1} : B \to A$ bijektiv, und für jedes $a \in A$ bzw. $b \in B$ gilt: $f^{-1}(f(a)) = a$ und $f(f^{-1}(b)) = b$ (d.h., $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$).

(2) Sind $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektiv (bzw. bijektiv), dann ist auch $g \circ f : A \to C$ injektiv (bzw. bijektiv).

(3) Für $f_i : M_i \to M_{i+1}$ mit $i = 1, 2, 3$ ist $f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$ (d.h., das Produkt von Abbildungen ist assoziativ).

Aufgabe 0/3/100
Eigenschaften von Abbildungen (3)

Index: gleichmächtige Mengen, surjektive Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Beweisen Sie: Sind M und N Mengen und existiert eine surjektive Abbildung $M \to N$, so ist $N \preceq M$.

Gilt die Umkehrung? Vorsicht!

Aufgabe 0/3/110
Natürliche Zahlen

Index: natürliche Ordnung, Addition ganzer Zahlen

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Addition und natürliche Ordnung der Menge $\mathbb{N}$:
Wir erinnern zunächst an die Definitionen. $0 := \emptyset \in \mathbb{N}$, und für $n \in \mathbb{N}$ wird $n+1$ durch $n + 1 := n \cup \{n\}$ definiert; so erhalten wir nach den peanoschen Axiomen die gesamte Menge $\mathbb{N}$. Weiter wird vereinbart:

(i) $n+k := n$ für $k = 0$ sowie $n+(k+1) := (n+k)+1$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$ (*Addition auf* $\mathbb{N}$).

(ii) $n < m$ falls $n \in m$ (*natürliche Ordnung auf* $\mathbb{N}$).

Entsprechend (ii) gilt $m = \{x \mid x < m\}$ („Gleichheit von Mengen“).

Beweisen Sie für beliebige $m, n, k \in \mathbb{N}$:

(1) $m < n \Rightarrow (m + 1 < n \ \vee \ m + 1 = n)$,

(2) $m < n \Rightarrow m + 1 < n + 1$,

(3) $m < n \Rightarrow m + k < n + k$ (Hinweis: vollständige Induktion).

Aufgabe 0/3/120
Mengenpotenzen (1)

Index: Abbildung, Definitionsbereich einer Abbildung, Bild einer Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

Für die Mengen M, N bezeichne M^N die Menge aller Abbildungen von N in M.
(1) Bestimmen Sie die Mengen $\emptyset^M$ und $M^\emptyset$.
(2) Wieviele Elemente enthält M^N, wenn M und N endlich sind?

Aufgabe 0/3/130
Mengenpotenzen (2)

Index: Abbildung, Definitionsbereich einer Abbildung, Bild einer Abbildung

Stoffeinheiten: 0/3/1 - 0/3/37 Relationen und Abbildungen

$X, Y\, Z$ seien Mengen. X^Y sei die Menge aller Abbildungen von Y in X und $X \approx Y$ soll bedeuten, dass zwischen X und Y eine Bijektion existiert. Beweisen Sie:
(1) Wenn $X \cap Y = \emptyset$, so ist $X^{Y \cup Z} \approx X^Y \times X^Z$.
(2) $(X \times Y)^Z \approx X^Z \times Y^Z$,
(3) $X^{Y \times Z} \approx (X^Y)^Z$.

Aufgabe 0/4/010
Abbildungen, kartesisches Produkt

Index: kartesisches Produkt, Auswahlaxiom

Stoffeinheiten: 0/4/1 - 0/4/16 Das Auswahlaxiom

$(f_i)_{i \in I}$ sei eine Menge von Abbildungen $f_i : M_i \to N_i$. Beweisen Sie, dass das kartesische Produkt

$$\prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} M_i \to \prod_{i \in I} N_i, \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto (f_i(x_i))_{i \in I}$$

dieser Abbildungen surjektiv ist, falls alle Abbildungen f_i surjektiv sind.
Gilt die Umkehrung?

Aufgabe 0/4/020
Zornsches Lemma, Beispiel*

Index: zornsches Lemma, lineare Ordnung

Stoffeinheiten: 0/4/1 - 0/4/16 Das Auswahlaxiom

Beweisen Sie: Jede Ordnung R einer Menge M lässt sich zu einer linearen Ordnung erweitern.

Aufgabe 0/4/030
Eine induktiv geordnete Menge

Index: induktiv geordnete Menge

Stoffeinheiten: 0/4/1 - 0/4/16 Das Auswahlaxiom

Es sei M eine Menge und $\mathcal{M}$ die Menge aller Paare (W, R), wobei $W \subseteq M$ und R eine Wohlordnung von W ist. In $\mathcal{M}$ sei eine Relation $\leq$, wie folgt definiert:

$(W_1, R_1) \leq (W_2, R_2) \iff W_1 \subseteq W_2$ und R_1 ist die Einschränkung von R_2 auf W_1, und jedes Element in W_1 ist bezüglich R_2 kleiner als jedes Element aus $W_2 \setminus W_1$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ induktiv geordnet ist.

Aufgabe 0/5/010
$\mathbb{N}$ als Ordinalzahl*

Index: Ordinalzahl, transitive Menge

Stoffeinheiten: 0/5/1 - 0/5/16 Kardinalzahlen

Zeigen Sie, dass die Menge ω der natürlichen Zahlen eine Ordinalzahl ist.

Hinweis. Diese Aufgabe erscheint uns zu schwer für den Schwierigkeitsgrad, den Sie eingestellt haben. Wählen Sie die Option „vereinfacht$=$ 0“, dann finden Sie ab 0/5/3 ausführliche Erläuterungen zum Begriff der Ordinalzahl.

Aufgabe 0/5/020
Eigenschaften von Ordinalzahlen* (1)

Index: Ordinalzahl, Fundierungsaxiom

Stoffeinheiten: 0/5/1 - 0/5/16 Kardinalzahlen

Zeigen Sie, dass für alle Ordinalzahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{Oz}$ gilt:

(1) Wenn $x \in \alpha$, so $x \in \mathsf{Oz}$.

(2) $\neg(\alpha < \alpha)$ (Irreflexivität)

(3) $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \implies \alpha < \gamma$ (Transitivität)

Hinweis. Diese Aufgabe erscheint uns zu schwer für den Schwierigkeitsgrad, den Sie eingestellt haben. Wählen Sie die Option „vereinfacht$=$ 0“, dann finden Sie ab 0/5/3 ausführliche Erläuterungen zum Begriff der Ordinalzahl.

Aufgabe 0/5/030
Eigenschaften von Ordinalzahlen* (2)

Index: Ordinalzahl, transitive Menge

Stoffeinheiten: 0/5/1 - 0/5/16 Kardinalzahlen

Für alle Ordinalzahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathsf{Oz}$ gilt:

(1) $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$ ($\alpha \leq \beta$ bedeutet $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$).

(2) Für jedes $\alpha \in \mathsf{Oz}$ ist $\alpha^+ := \alpha \cup \{\alpha\}$ die kleinste Ordinalzahl, die größer ist als α.

(3) Für jede Menge M von Ordinalzahlen ist auch $\bigcup M$ eine Ordinalzahl.

Hinweis. Diese Aufgabe erscheint uns zu schwer für den Schwierigkeitsgrad, den Sie eingestellt haben. Wählen Sie die Option „vereinfacht$=$ 0“, dann finden Sie ab 0/5/3 ausführliche Erläuterungen zum Begriff der Ordinalzahl.

Aufgabe 0/5/040
Eigenschaften von Ordinalzahlen* (3)

Index: Ordinalzahl, Limeszahl, Vereinigungsmenge

Stoffeinheiten: 0/5/1 - 0/5/16 Kardinalzahlen

Zeigen Sie für beliebige Ordinalzahlen α:

$$\alpha \text{ ist eine Limeszahl} \iff \alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta.$$

Hinweis. Diese Aufgabe erscheint uns zu schwer für den Schwierigkeitsgrad, den Sie eingestellt haben. Wählen Sie die Option „vereinfacht = 0“, dann finden Sie ab 0/5/3 ausführliche Erläuterungen zum Begriff der Ordinalzahl.

Aufgabe 0/5/050
Abzählbare Mengen (1)

Index: abzählbare Menge, gleichmächtige Mengen

Stoffeinheiten: 0/5/1 - 0/5/16 Kardinalzahlen

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(1) Teilmengen abzählbarer Mengen sind abzählbar.

(2) Ist n eine natürliche Zahl ≥ 2, dann gilt $\underbrace{\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{n-mal} \approx \mathbb{N}$.

(3) Sind $A_1, \ldots, A_n$ abzählbar, dann ist $A_1 \times \ldots \times A_n$ abzählbar.

Aufgabe 0/5/060
Abzählbare Mengen (2)

Index: abzählbare Menge, gleichmächtige Mengen

Stoffeinheiten: 0/5/1 - 0/5/16 Kardinalzahlen

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

(1) Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.

(2) Die Mengen der ganzen und der rationalen Zahlen sind abzählbar.

(3) Ist A abzählbar und B überabzählbar, dann ist $B \setminus A$ überabzählbar.

(4) Die Menge aller endlichen Folgen rationaler Zahlen ist abzählbar.

Aufgaben zum Kapitel 1

Aufgabe 1/1/010
Operationen, Beispiele

Index: Operation, Monoid, Operation eines Monoids

Stoffeinheiten: 1/1/1 Monoide

Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen definieren wir Operationen

(1) $x * y := x - y$,

(2) $x \times y := x^2 + y^2$,

(3) $x \odot y := 3x + y$.

Untersuchen Sie diese auf Assoziativität und Kommutativität.

Aufgabe 1/1/020
Monoide und Gruppen, Beispiele

Index: Operation, Monoid, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Welches der folgenden Paare $(M, \cdot)$ ist ein Monoid, welches eine Gruppe? Die Antworten sind zu beweisen.

(1) M sei eine beliebige Menge mit wenigstens 2 Elementen. Die Operation $\cdot$ ist durch $x \cdot y = x$ für alle $x, y \in M$ gegeben.

(2) $M = \mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen mit der Operation $x \circ y = x + y + xy$.

(3) $M := \mathbb{N} - \{0\}$ mit einer der folgenden Operationen ggT, kgV,
$\mathrm{kgV}(a, b) :=$ kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b
$\mathrm{ggT}(a, b) :=$ größter gemeinsamer Teiler von a und b

(4) Die Menge $(\mathrm{Abb}(X, X), \cdot)$ aller Abbildungen einer gegebenen Menge X in sich mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen.

(5) Die Menge $M = \mathrm{S}(X)$ der bijektiven Abbildungen $X \to X$ mit der Hintereinanderausführung von Abbildungen.

Aufgabe 1/1/030
Beispiele für Gruppen (1)

Index: Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Untersuchen Sie, ob eine der folgenden Operationen eine Gruppenstruktur auf der angegebenen Menge G definiert:

(1) $G := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 |\ b \neq 0\}$ mit der Operation
$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa', ab' + ba'),$$

(2) $G := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 |\ a \neq 0\}$ mit der Operation
$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa', ab' + ba').$$

Aufgabe 1/1/040
Rechnen mit Gruppenelementen (1)

Index: Gruppenoperation

Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(1) $(M,\cdot)$ sei ein Monoid, dann gilt für alle $a \in M$
$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ und $(a^m)^n = a^{(m\cdot n)}$ $(m,n \in \mathbb{N})$.

(2) $(G,\cdot)$ sei eine Gruppe. Dann gilt die unter (1) angegebene Eigenschaft für alle $m,n \in \mathbb{Z}$.

(3) G sei eine abelsche Gruppe. Dann ist $(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ für alle $a,b \in G$ und $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 1/1/060
Direktes Produkt von Gruppen

Index: direktes Produkt von Monoiden, direktes Produkt von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

$(G_1,\cdot_1)$ und $(G_2,\cdot_1)$ seien Gruppen. Wir definieren auf $G_1 \times G_2$ eine Operation durch
$$(x,y) * (x',y') := (x \cdot_1 x', y \cdot_2 y') \text{ für } (x,y),\ (x',y') \in G_1 \times G_2.$$
Beweisen Sie:

(1) $(G_1 \times G_2, *)$ ist eine Gruppe.

(2) $(G_1 \times G_2, *)$ ist genau dann kommutativ, wenn G_1 und G_2 kommutativ sind.

Aufgabe 1/1/070
Ein Untergruppenkriterium

Index: Gruppe, Untergruppe, Untergruppenkriterium

Stoffeinheiten: 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

$(G,\cdot)$ sei eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine endliche, nichtleere Teilmenge von G. Beweisen Sie:
H ist Untergruppe von G genau dann, wenn für alle $x,y \in H$ gilt $x\cdot y \in H$.

Kann auf die Voraussetzung verzichtet werden, dass H endlich ist?

Aufgabe 1/1/090
Gruppen von Primzahlordnung

Index: Gruppe, Untergruppe, Ordnung einer Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

Zeigen Sie: Eine Gruppe, derer Ordnung eine Primzahl ist, ist zyklisch.

Wieviele Untergruppen hat eine solche Gruppe?

Aufgabe 1/1/110
Beispiele für Gruppen (2)

Index: Gruppe, Operation, Gruppentafel

Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen mit höchstens 5 Elementen.

Aufgabe 1/1/120
Zyklische Gruppen (1)

Index: zyklische Gruppe, Untergruppe, Erzeugung von Untergruppen, Isomorphismus von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

G sei eine Gruppe, $g \in G$. Wir bezeichnen mit (g) die Teilmenge
$(g) := \{g^n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ von G.

(1) Zeigen Sie: (g) ist Untergruppe von G.

(2) Existiert in einer Gruppe G ein Element g mit $(g) = G$, so heißt G eine zyklische Gruppe. Beweisen Sie: Zwei zyklische Gruppen sind genau dann isomorph, wenn ihre Kardinalzahlen übereinstimmen.

(3) Bestimmen Sie alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe.

Aufgabe 1/1/130
Zyklische Gruppen (2)

Index: zyklische Gruppe, Untergruppe, Erzeugung von Untergruppen

Stoffeinheiten: 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

Zeigen Sie: Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

Aufgabe 1/1/150
Symmetriegruppen einfacher Figuren

Index: Isomorphismus von Gruppen, Untergruppe, Symmetriegruppe

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

Mit G bezeichnen wir die *Symmetriegruppe* eines gleichseitigen Dreiecks, das wir als Teilmenge des Raumes betrachten. Damit meinen wir die Gruppe der Bewegungen, die diese Figur in sich überführen; jedes ihrer Elemente ist durch die Zuordnung der Ecken eindeutig bestimmt.

(1) Geben Sie einen Isomorphismus $f : G \to \mathrm{S}_3$ an!

(2) Bestimmen Sie die Untergruppe $f(U)$ von S_3, wenn U die Untergruppe der Drehungen des Dreiecks in der Ebene bezeichnet.

(3) Lässt sich ein Isomorphismus der Symmetriegruppe eines Quadrats und der Gruppe S_4 finden?

Aufgabe 1/1/160
Diedergruppe

Index: Isomorphismus von Gruppen, Symmetriegruppe, Diedergruppe, Normalteiler

Stoffeinheiten: 1/1/19 - 1/1/22 Nebenklassen einer Untergruppe

Es sei A eine abelsche Gruppe. Die zu A gehörige Diedergruppe wird als

$$\mathrm{D}(A) := \{(a, \varepsilon) | a \in A,\ \varepsilon \in \{1, -1\}\}$$

definiert mit der Multiplikation

$$(a, \varepsilon)(b, \eta) = (ab^{\varepsilon}, \varepsilon\eta).$$

Zeigen Sie:

(1) $\mathrm{D}(A)$ ist Gruppe mit neutralem Element $(1, 1)$, und $(a, \varepsilon)^{-1} = (a^{-\varepsilon}, \varepsilon)$ für $(a, \varepsilon) \in \mathrm{D}(A)$.

(2) Wir identifizieren A mit dem Bild bei der injektiven Abbildung $a \mapsto (a, 1)$. Dann ist A Normalteiler in $\mathrm{D}(A)$ und hat den Index 2.

(3) Wir bezeichnen mit D_n die *Symmetriegruppe* des regulären n-Ecks, betrachtet als Figur im 3-dimensionalen Raum. Damit meinen wir die Gruppe der Bewegungen, die diese Figur in sich überführen; jedes ihrer Elemente ist durch die Zuordnung der Ecken eindeutig bestimmt.
D_n ist isomorph zur Diedergruppe $\mathrm{D}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ der zyklischen Gruppe der Ordnung n (gewöhnlich wird D_n selbst als „Diedergruppe“ bezeichnet).

Aufgabe 1/1/180
Gruppenhomomorphismen (1)

Index: Gruppenhomomorphismus, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

Welche der folgenden Operationen definiert eine Gruppenstruktur auf der angegebenen Menge und welche der angegebenen Abbildungen ist ein Gruppenhomomorphismus?

(1) $f : \mathbb{Z} \to \{1, -1\}$ mit $f(n) := (-1)^n$ (die Operation auf $\mathbb{Z}$ ist die Addition ganzer Zahlen, die Operation auf $\{1, -1\}$ die Multiplikation ganzer Zahlen)

(2) $f : \mathbb{Z} \to \{1, -1\}$ mit $f(n) := (-1)^{n+1}$ (die Operationen werden wie zuvor gewählt)

(3) $f : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ mit $f(x) := \frac{x}{|x|}$ ($\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$ erhält als Operation die Multiplikation rationaler Zahlen)

Aufgabe 1/1/190
Gruppenhomomorphismen (2)

Index: Gruppenhomomorphismus, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

$(G, \cdot)$ sei eine Gruppe. Bestimmen Sie alle Gruppenhomomorphismen $(\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot)$.

Aufgabe 1/1/200
Gruppenhomomorphismen (3)

Index: Gruppenhomomorphismus, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/6 - 1/1/12 Untergruppen, Homomorphismen

$(G,\cdot)$ sei eine Gruppe und $\varphi : (\mathbb{Q},+) \to (G,\cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus. Wir setzen voraus, dass φ nicht jedes Element von $\mathbb{Q}$ auf das neutrale Element der Gruppe G abbildet.

Zeigen Sie, dass G unendlich ist.

Aufgabe 1/1/210
Gruppenhomomorphismen (4)

Index: Gruppenhomomorphismus, Gruppe, Normalteiler, Isomorphismus von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/1/23 Bild und Kern eines Gruppenhomomorphismus

$(G,\cdot)$ sei Gruppe. Für $g \in G$ definieren wir $\varphi_g : G \longrightarrow G$ durch $\varphi_g(x) := g^{-1}\cdot x \cdot g$. Zeigen Sie:

(1) φ_g ist ein Isomorphismus (Isomorphismen $G \to G$ heißen auch *Automorphismen* von G).

(2) Es sei $\mathrm{Z}(G) := \{x \in G \mid \forall g \in G : x \cdot g = g \cdot x\}$. Die Mengen $U_g := \{x \mid \varphi_g(x) = x\}$ bilden Untergruppen von G und $\mathrm{Z}(G)$ ist Durchschnitt aller U_g mit $g \in G$.

(3) $\mathrm{Z}(G)$ ist Normalteiler in G.

(4) Die Menge $\mathrm{Inn}(G)$ der Automorphismen φ_g mit $g \in G$ ist ein Normalteiler in der Gruppe aller Automorphismen von G.

(5) $\mathrm{Inn}(G) \cong G/\mathrm{Z}(G)$.

Aufgabe 1/1/220
Rechnen mit Gruppenelementen (1)

Index: Gruppe, Ordnung eines Gruppenelements

Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

$(G,\cdot)$ sei eine Gruppe, $a,b \in G$ und a ein Element der Ordnung 5, für das $a^3\cdot b = b\cdot a^3$ gilt. Beweisen Sie: $a\cdot b = b \cdot a$.

Anmerkung. Als *Ordnung* eines Gruppenelements a bezeichnen wir die kleinste Zahl $n \geq 1$, für die a^n das neutrale Element ist (bzw. das Symbol ∞, falls eine solche Zahl nicht existiert).

Aufgabe 1/1/230
Rechnen mit Gruppenelementen (2)

Index: Gruppe, Ordnung eines Gruppenelements

Stoffeinheiten: 1/1/2 - 1/1/5 Begriff der Gruppe

$(G,\cdot)$ sei eine Gruppe mit neutralem Element e. Gilt dann $g^2 = e$ für alle $g \in G$, so ist G abelsch.

Anmerkung. Als *Ordnung* eines Gruppenelements a bezeichnen wir die kleinste Zahl $n \geq 1$, für die a^n das neutrale Element ist (bzw. das Symbol ∞, falls eine solche Zahl nicht existiert).

Aufgabe 1/1/240

Rechnen mit Permutationen, Signum

Index: Permutation, Signum einer Permutation, Vorzeichen einer Permutation

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

Beweisen Sie: Für einen Zyklus $\sigma \in \mathrm{S}_n$ der Länge t ist $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{t-1}$.

Aufgabe 1/1/250
Rechnen mit Permutationen, Kommutator

Index: Permutationsgrupe, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

G sei eine Gruppe. Für $x, y \in G$ nennen wir das Gruppenelement $[x, y] := x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1}$ den „Kommutator“ von x und y.

(1) Beweisen Sie: Für beliebige $x, y \in G$ ist $[x, y]^{-1} = [y, x]$.

(2) Beweisen Sie: Für beliebige $x, y, z \in G$ gilt $[x \cdot y, z] = x \cdot [y, z] \cdot x^{-1} \cdot [x, z]$.

(3) Überprüfen Sie, ob in der Permutationsgruppe S_3 für alle Elemente x, y, z die Gleichung $[[x, y], z] = \mathrm{id}$ erfüllt ist.

Aufgabe 1/1/260 (S: Varianten)
Rechnen mit Permutationen

Index: Permutation

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

Rechnen mit Permutationen:

(1) Bestimmen Sie $\sigma \cdot \tau$ und $\tau \cdot \sigma$ für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,2\,3\,5\,1\,4 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 1\,5\,4\,2\,6\,3 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestimmen Sie σ^{-1} und die Potenzen σ^n ($n \in \mathbb{N}$) der nachfolgend angegebenen Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,7\,5\,6\,4\,3 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis.

(1) Es ist

$$\sigma \cdot \tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 6\,1\,5\,2\,4\,3 \end{pmatrix}, \quad \tau \cdot \sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 3\,5\,4\,6\,1\,2 \end{pmatrix}.$$

(2) $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,7\,6\,4\,5\,3 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,3\,6\,4\,5\,7 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,3\,6\,4\,5\,7 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,7\,4\,5\,6\,3 \end{pmatrix},$

$\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7 \\ 1\,2\,3\,5\,6\,4\,7 \end{pmatrix}, \ldots$

Aufgabe 1/1/270 (S: Varianten)
Rechnen mit Permutationen

Index: Permutation, Zyklus, Signum einer Permutation, Vorzeichen einer Permutation

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

Bestimmen Sie die Faktoren der Zerlegungen in disjunkte Zyklen für folgende Permutationen:

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 1 & 9 & 8 & 5 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 7 & 6 & 12 & 4 & 9 & 8 & 11 & 15 & 14 & 5 & 13 & 10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ergebnis. Wir erhalten die folgenden Faktoren.

Fall (1):

(1,4,3,2)

Fall (2):

(1,6,5,8,3)
(4,9)

Fall (3):

(1,3,6,9,15)
(2,7,8,11,5,4,12,13,10,14)

Aufgabe 1/1/280 (S: Varianten)
Rechnen mit Permutationen, Zyklen

Index: Permutation, Zyklus, Signum einer Permutation, Vorzeichen einer Permutation

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

Für einen Zyklus σ der Länge t ist $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{t-1}$. Benutzen Sie diese Eigenschaft zur Bestimmung des Vorzeichens der folgenden Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ 14 & 20 & 11 & 10 & 4 & 2 & 3 & 6 & 18 & 9 & 19 & 21 & 17 & 1 & 13 & 5 & 12 & 16 & 15 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis.

(1,14)
(2,20,8,6)
(3,11,19,15,13,17,12,21,7)
(4,10,9,18,16,5)

ist die Zyklenzerlegung der gegebenen Permutation σ; daraus erhalten wir $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.

Aufgabe 1/1/290 (S: Varianten)

Permutationsgruppe, Untergruppen (1)

Index: Permutationsgruppe, Untergruppe, Ordnung einer Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

In S_n betrachten wir für $\sigma \in \mathrm{S}_n$ die Untergruppe $(\sigma) := \{\sigma^i |\ i \in \mathbb{Z}\}$. Die Zahl $o(\sigma) := |(\sigma)|$ heißt Ordnung von σ.

(1) Zeigen Sie: $(\sigma) = \{\sigma^i |\ i \in \mathbb{N}\}$.

(2) $\mathcal{M} := \{\tau \cdot (\sigma) |\ \tau \in \mathrm{S}_n\}$ mit $\tau \cdot (\sigma) := \{\tau \cdot \sigma^n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine Partition der Menge S_n.

(3) Die Klassen der Partition $\mathcal{M}$ enthalten gleichviele Elemente, und es gilt
$$|\mathcal{M}| \cdot o(\sigma) = |\mathrm{S}_n|,$$
insbesondere ist also $o(\sigma)$ ein Teiler von $n! = |\mathrm{S}_n|$.

(4) Es sei $\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathrm{S}_5$ mit $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$. Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ eine der Zahlen 2, 3, 5 ist.

(5)* Berechnen Sie die Ordnung einer Permutation mittels ihrer Zyklenzerlegung. Bestimmen Sie insbesondere die Ordnung von

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ 12 & 13 & 6 & 9 & 3 & 10 & 1 & 15 & 19 & 7 & 4 & 17 & 11 & 14 & 18 & 16 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{S}_{19}$$

Ergebnis. Zu (5) geben wir das Resultat der Rechnung an. Durch

(1,12,17,5,3,6,10,7)
(2,13,11,4,9,19,8,15,18)

ist die Zyklenzerlegung der Permutation σ gegeben; es folgt $o(\sigma) = 72$.

Aufgabe 1/1/300

Gruppen als Untergruppen der symmetrischen Gruppe

Index: Permutationsgruppe, Gruppenhomomorphismus, symmetrische Gruppe

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

$(G, \cdot)$ sei Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : G \to S(G)$ mit $\varphi(g)(x) := g \cdot x$ von G in die Gruppe $S(G)$ der bijektiven Abbildungen $G \to G$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 1/1/310

Permutationsgruppe, Untergruppen (2)

Index: Permutationsgruppe, Untergruppe

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

Bestimmen Sie alle Untergruppen der Permutationsgruppen S_3 und S_4.

Aufgabe 1/1/330

Typ einer Permutation

Index: Permutationsgruppe, Äquivalenzrelation, Zyklus, Normalteiler

Stoffeinheiten: 1/1/13 - 1/1/18 Permutationen

Wir betrachten die Gruppe S_n der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

(1) Zeigen Sie, dass die durch $\sigma \sim \tau \iff \exists \rho (\sigma = \rho^{-1} \cdot \tau \cdot \rho)$ gegebene Relation auf S_n („Konjugation“) eine Äquivalenzrelation ist.

(2) Wie wir schon wissen, ist eine Permutation (im wesentlichen eindeutig) Produkt elementfremder Zyklen. Wir sagen, σ hat die Zyklenstruktur $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, falls in dieser Zerlegung ν_2 Zyklen der Länge 2, ν_3 Zyklen der Länge $3, \ldots, \nu_r$ Zyklen der Länge r usw. auftreten und $\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + n\nu_n = n$ ist.

Beweisen Sie: Die Abbildung, die jeder Permutation aus S_n ihre Zyklenstruktur zuordnet, ist eine vollständige Invariante der Konjugation.

Aufgabe 1/1/360
Normalteilerkriterien

Index: Gruppe, Untergruppe, Normalteiler

Stoffeinheiten: 1/1/19 - 1/1/22 Nebenklassen einer Untergruppe

Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, H eine Untergruppe von G.

Für Teilmengen A, B von G wird stets $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ gesetzt (bei einelementigen Mengen werden meist die Klammern $\{\,\}$ weggelassen).

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(1) H ist Normalteiler von G.

(2) $x^{-1}hx \in H$ für alle $x \in G$ und $h \in H$.

(3) $x^{-1}Hx \subseteq H$ für alle $x \in G$.

(4) $xH = Hx$ für alle $x \in G$.

(5) $(xH)(yH) = (xy)H$ für alle $x, y \in G$.

Aufgabe 1/1/370
Untergruppen vom Index 2

Index: Gruppe, Untergruppe, Index einer Untergruppe, Normalteiler

Stoffeinheiten: 1/1/19 - 1/1/22 Nebenklassen einer Untergruppe

G sei eine Gruppe, H eine Untergruppe vom Index 2, d.h. eine Untergruppe, die genau zwei rechte Nebenklassen besitzt. Beweisen Sie: H ist Normalteiler in G.

Aufgabe 1/1/380
Normalteiler, Gegenbeispiel

Index: Gruppe, Untergruppe, Normalteiler, Gruppenhomomorphismus

Stoffeinheiten: 1/1/19 - 1/1/22 Nebenklassen einer Untergruppe

Geben Sie ein Beispiel für einen Gruppenhomomorphismus $f : G_1 \to G_2$ an, dessen Bild $\mathrm{im}(f)$ kein Normalteiler in G_2 ist.

Aufgabe 1/1/400
Normalteiler und Isomorphie (1)

Index: Gruppe, Untergruppe, Normalteiler, Isomorphismus von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/1/24 - 1/1/28 Faktorgruppen, das Homomorphieprinzip

$(G, \cdot)$ sei eine Gruppe, H eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler. Mit $AB := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$ wird das „Produkt" zweier Teilmengen $A, B \subseteq G$ bezeichnet. Dann gilt:

(1) $H \cap N$ ist Normalteiler von H.

(3) HN ist Gruppe und N ist Normalteiler in HN.

(3) $H/(H \cap N) \cong HN/N$.

Aufgabe 1/1/410
Normalteiler und Isomorphie (2)

Index: Gruppe, Untergruppe, Normalteiler, Isomorphismus von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/1/24 - 1/1/28 Faktorgruppen, das Homomorphieprinzip

$(G, \cdot)$ sei eine Gruppe und H und N Normalteiler in G mit $N \subseteq H$. Beweisen Sie:

(1) H/N ist Normalteiler in G/N.

(2) $G/H \cong (G/N)/(H/N)$.

Aufgabe 1/1/420
Isomorphie: Beispiele und Gegenbeispiele (1)

Index: Gruppe, Isomorphismus von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/1/24 - 1/1/28 Faktorgruppen, das Homomorphieprinzip

Welche der folgenden Gruppen sind isomorph?

(1) $D_4 :=$ Gruppe der Decktransformationen eines Quadrats

(2) S_4

(3) $\mathbb{Z}/(24)$

(4) $\mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(6)$

Aufgabe 1/1/430
Isomorphie: Beispiele und Gegenbeispiele (2)

Index: Gruppe, Isomorphismus von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/1/160 Diedergruppe

Untersuchen Sie in jedem der folgenden Fälle, welche der aufgeführten Gruppen isomorph sind.

(1) $(\mathrm{S}_3, \circ)$, $(\mathbb{Z}/(6), +)$, $(\mathbb{Z}/(7)^*, \cdot)$

(2) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$

(3) $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$, wobei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge der positiven reellen Zahlen ist; die Operationen sind Einschränkungen der ebenso bezeichneten Operationen für Zahlen.

(4) $(\mathrm{D}_n, \circ)$ (die Diedergruppe) und $(\mathrm{S}_n, \cdot)$ (für ein festes $n \geq 2$)

Aufgabe 1/2/010
Rechnen mit Restklassen

Index: ganze Zahl, Restklasse

Stoffeinheiten: 1/2/29 - 1/2/33 Das Homomorphieprinzip für Ringe

Wir wissen bereits, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein Ring ist.

(1) Zeigen Sie: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2^n teilbar, wenn ihre letzten n Ziffern durch 2^n teilbar sind.

(2) Bestimmen Sie die letzte Ziffer der Zahl $6^{6^{6^6}} - 5^{5^{5^5}}$.

Aufgabe 1/2/040 (S: Varianten)
Rechnen mit komplexen Zahlen (1)

Index: komplexe Zahlen, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = 2i - 1$, $b = 3i + 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft
$$x^2 - (i - 4)x + (i + 5) = 0.$$

(3) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = 56i$ mit $x \in \mathbb{C}$.

Lösung.

(1) Es ist $a + b = 5i + 2$, $a - b = -i - 4$ und $ab = 3i - 9$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als
$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \bar{b}}{b \cdot \bar{b}} = \frac{(2i - 1)\cdot(-3i + 3)}{(3i + 3)\cdot(-3i + 3)} = \frac{9i + 3}{18} = (\frac{1}{2}i + \frac{1}{6}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch
$$(x - (\frac{1}{2}i - 2))^2 = -(3i + \frac{5}{4})$$
ausdrücken, gleichbedeutend als
$$(*) \qquad 4\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 2))^2 = -12i - 5.$$
Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-12i - 5$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher
$$(u + vi)^2 = -12i - 5$$
äquivalent zum System

$$(\ast)\quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -5 \\ \quad 2uv = -12. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(3i - 2).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(\ast)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x - (\frac{1}{2}i - 2)) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -i - 1$ und $x_2 = 2i - 3$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

(3) Wir setzen $x = u + iv$ mit reellen Zahlen u, v. Die Gleichung $x^3 = 56i$ ist nun äquivalent zu

$$u^3 + 3u^2vi - 3uv^2 - v^3i = 56i,$$

daher zu

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3uv^2 - v^3 = 56. \end{cases}$$

Im Fall $u = 0$ ergibt die zweite dieser Bedingungen $v = -2\cdot\sqrt[3]{7}$, wobei die erste trivialerweise erfüllt ist.

Ist $u \neq 0$, so erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = 0,\ \text{ d.h. } (u + \sqrt{3}v)(u - \sqrt{3}v) = 0,\ \text{ also}$$
$$u = \pm\sqrt{3}v$$

und nach Einsetzen in die zweite

$$8v^3 = 56,\ \text{ daher } v = \sqrt[3]{7}.$$

$x^3 = 56i$ ist daher genau dann erfüllt, wenn x eine der drei Zahlen $x = -2\cdot\sqrt[3]{7}\,i$, $x = \pm\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{7}\,i$ ist.

Aufgabe 1/2/050 (S: Varianten)

Rechnen mit komplexen Zahlen (2)

Index: komplexe Zahlen, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) a, b bezeichnen $a = -2i - 1$, $b = -i - 3 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b$, $a - b$, ab und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft

$$x^2 - (i - 1)x - 13i = 0.$$

Lösung.

(1) Es ist $a+b=-3i-4$, $a-b=-i+2$ und $ab=7i+1$.
Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot\overline{b}}{b\cdot\overline{b}}=\frac{(-2i-1)\cdot(i-3)}{(-i-3)\cdot(i-3)}=\frac{5i+5}{10}=(\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=\frac{25}{2}i$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*)\qquad 4\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))^2=50i.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $50i$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z=u+vi$ ist ($u,v\in\mathbb{R}$). Nun ist $(u+vi)^2=u^2-v^2+2uvi$, daher

$$(u+vi)^2=50i$$

äquivalent zum System

$$\binom{*}{*}\qquad \begin{cases} u^2-v^2=0\\ \quad 2uv=50.\end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u,v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z=u+vi=\pm(5i+5).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x-(\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}))=\pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1=-2i-3$ und $x_2=3i+2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

Aufgabe 1/2/070
Adjunktion von Quadratwurzeln

Index: Unterkörper

Stoffeinheiten: 1/2/4 - 1/2/5 Integritätsbereiche und Körper

Wir betrachten die Menge $K=\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ aller reellen Zahlen der Form $a+b\sqrt{2}$ mit rationalen Zahlen a und b. Beweisen Sie:

(1) Die Addition reeller Zahlen besitzt eine Einschränkung auf K, und K ist mit dieser Operation eine Gruppe.

(2) Die Multiplikation reeller Zahlen besitzt eine Einschränkung auf die Teilmenge $K\setminus\{0\}$ von K, und $K\setminus\{0\}$ ist mit dieser Operation eine Gruppe.

(3) $(K,+,\cdot)$ ist ein Körper.

Aufgabe 1/2/080
Ganze gaußsche Zahlen, Division mit Rest

Index: Unterkörper, Unterring, Division mit Rest

Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

(1) Es sei $\mathbb{Q}[i] := \{a+ib \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[i]$ ist ein Unterkörper von $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist.

(2) Es sei $\mathbb{Z}[i] := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[i]$ ist ein Unterring von $(\mathbb{Q}[i], +, \cdot)$ ist.

(3) Wir definieren $\varphi : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$, $a + ib \mapsto |a + ib|^2 = a^2 + b^2$. Zeigen Sie: Für α, $\beta \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ gibt es $\kappa, \rho \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\alpha = \kappa \cdot \beta + \rho$ und $0 \le \varphi(\rho) < \varphi(\beta)$.

Aufgabe 1/2/090
Einheiten einiger Ringe (1)

Index: Einheit, Ring

Stoffeinheiten: 1/2/26 - 1/2/28 Teilbarkeitslehre im Ring der ganzen Zahlen

p sei eine Primzahl. Wir bezeichnen mit $\mathbb{Z}_{(p)}$ die Menge

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \text{ ist nicht durch p teilbar}\}.$$

(1) Zeigen Sie: Addition und Multiplikation rationaler Zahlen besitzen Einschränkungen auf $\mathbb{Z}_{(p)}$, und $\mathbb{Z}_{(p)}$ ist mit diesen Operationen ein Unterring von $\mathbb{Q}$.

(2) Bestimmen Sie die Einheiten in $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Aufgabe 1/2/100
Einheiten einiger Ringe (2)

Index: Einheit, Ring

Stoffeinheiten: 1/2/19 - 1/2/25 Der Begriff der Teilbarkeit

Bestimmen Sie die Einheiten der Ringe $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}[X]$.

Aufgabe 1/2/110
Einheiten einiger Ringe (3)

Index: Einheit, Ring , Einsetzungshomomorphismus

Stoffeinheiten: 1/2/19 - 1/2/25 Der Begriff der Teilbarkeit

Mit $\mathbb{Z}[i]$ bezeichnen wir das Bild des Einsetzungshomomorphismus

$$\mathbb{Z}[X] \to \mathbb{C}, \quad X \mapsto i.$$

Bestimmen Sie die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 1/2/120
Einheiten einiger Ringe (4)

Index: Restklassenring modulo m, Einheit

Stoffeinheiten: 1/2/29 - 1/2/33 Das Homomorphieprinzip für Ringe

Geben Sie alle Einheiten der folgenden Ringe an:

(1) $\mathbb{Z}/(7)$,

(2) $\mathbb{Z}/(8)$,

(3)* $\mathbb{Z}/(n)$,

(4)* $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] := \{a + bi\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ (als Unterring von $\mathbb{C}$).

Aufgabe 1/2/130
Nilpotente Ringelemente und Einheiten

Index: Einheit, Ring, nilpotentes Ringelement

Stoffeinheiten: 1/2/19 - 1/2/25 Der Begriff der Teilbarkeit

R sei ein kommutativer Ring, $e \in R$ eine Einheit und $n \in R$ *nilpotent* (d.h. es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $n^k = 0$). Beweisen Sie: $e + n$ ist eine Einheit.

Anleitung. Betrachten Sie zunächst den Fall $e = 1$.

Aufgabe 1/2/140
Faktorring nach einem Maximalideal

Index: Ideal, Ring, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/29 - 1/2/33 Das Homomorphieprinzip für Ringe

R sei ein kommutativer Ring mit mehr als einem Element. Zeigen Sie:

(1) R besitzt ein Maximalideal, d.h. ein Ideal $\boldsymbol{m} \neq R$, das bezüglich der Inklusion unter allen von $\mathbf{0}$ verschiedenen Idealen maximal ist.

(2) Für jedes Maximalideal $\boldsymbol{m}$ in R ist $R/\boldsymbol{m}$ ein Körper.

Aufgabe 1/2/150
Rechnen mit Idealen

Index: Ideal, Ring, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/29 - 1/2/33 Das Homomorphieprinzip für Ringe

Sei R ein Ring.

(1) Zeigen Sie: $\{0\}$ und R sind Ideale, und falls R ein Körper ist, dann gibt es keine weiteren.

(2) Zeigen Sie: Der Durchschnitt einer Menge von Idealen in R ist wieder ein Ideal.

(3) I und J seien Ideale, ist dann $I \cup J$ immer ein Ideal?
Zeigen Sie: Das kleinste Ideal, das I und J enthält, ist
$I + J := \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$.

(4) Zeigen Sie, daß für Ideale I, J, L in R stets $I + J = J + I$ und $(I + J) + L = I + (J + L)$ gilt.

Aufgabe 1/2/170
Der Ersetzungshomomorphismus für ganzzahlige Polynome

Index: Ersetzungshomomorphismus, Einsetzungshomomorphismus, Polynomring

Stoffeinheiten: 1/2/12 - 1/2/15 Algebren

Bestimmen Sie alle $\mathbb{Z}$-Algebrahomomorphismen von $\mathbb{Z}[X]$ auf $\mathbb{Z}[X]$. Welche sind Isomorphismen?

Aufgabe 1/2/190
Polynome und Abbildungen

Index: Ersetzungshomomorphismus, Einsetzungshomomorphismus, Polynom, Polynome sind keine Funktionen

Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

Sind Polynome Funktionen?

Wir betrachten den dreielementigen Primkörper $K = \mathbb{F}_3$ und bilden den Polynomring $P := K[X]$ über K. Überprüfen Sie, dass der Einsetzungshomomorphismus durch

$$\Phi : P \to \mathrm{Abb}(K, K)$$
$$(\Phi(f))(\alpha) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in P,\ \alpha \in K$$

einen Ringhomomorphismus Φ definiert und untersuchen Sie diesen auf Injektivität.

Aufgabe 1/2/195
Nichteindeutigkeit des Polynomgrades?*

Index: Polynomring, Grad eines Polynoms, Polynom

Stoffeinheiten: 1/2/9 - 1/2/11 Polynome in einer Unbestimmten

* Wir betrachten den Polynomring $R^{[1]}$ in einer Unbestimmten über dem Ring R. Geben Sie eine hinreichende Bedingung für R an, dass der Grad eines Polynoms unabhängig von der Wahl einer Unbestimmten definiert werden kann.

Motivation zur Lösung. Immer ist das bestimmt nicht der Fall, wie folgendes Beispiel zeigt:
Wir wählen $R = \mathbb{F}_2[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ als Faktorring des Polynomrings $\mathbb{F}_2[\varepsilon]$ in der Unbestimmten ε. Der Einsetzungshomomorphismus

$$\Phi : R[X] \to R[X]\,, \quad X \mapsto \varepsilon X^2 + X$$

ist dann offensichtlich ein Isomorphismus der R-Algebra $R[X]$ auf sich, denn Ψ^2 ist die Identität. Daher ist $\varepsilon X^2 + X$ ebenfalls eine Unbestimmte in $R[X]$.

Den hier genannten Begriff des *Faktorrings* finden Sie unter 1/2/29 - 1/2/33, er ist jedoch für eine Lösung nicht erforderlich. Und natürlich werden keine trivialen Antworten erwartet …

Aufgabe 1/2/200
Nilpotente Polynome

Index: nilpotentes Ringelement, Polynom, Polynomring

Stoffeinheiten: 1/2/9 - 1/2/11 Polynome in einer Unbestimmten

Ein Element a eines Ringes heißt *nilpotent*, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a^n = 0$. Nun sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie:

$f \in R[X]$ ist genau dann nilpotent, wenn alle Koeffizienten nilpotent sind.

Aufgabe 1/2/210
Nullstellenbestimmung (1)

Index: Polynom, Nullstelle, endlicher Körper

Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

Bestimmen Sie die Elemente x aus dem jeweils angegebenen Körper K, für die die angegebene Gleichung erfüllt ist.

(1) $x^5 + x^4 + 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_7$)

(2) $x^3 - 1 = 0$ (K ist einer der Körper $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$)

Aufgabe 1/2/220 (S: Varianten)
Nullstellenbestimmung (2)

Index: Polynom, endlicher Körper, Nullstelle

Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{F}_{13}$ mit $x^4 - 4x^3 - 6x + 2 = 0$.

Ergebnis. Durch Einsetzen folgt
$f(0) = 2$, $f(1) = 6$, $f(2) = 0$, $f(3) = -4$, $f(4) = 4$, $f(5) = 6$, $f(6) = -5$, $f(7) = 1$, $f(8) = 0$, $f(9) = 5$, $f(10) = 1$, $f(11) = -3$, $f(12) = 0$,
daher erhalten wir als Lösungen die Klassen von $2, 8, 12$ in $\mathbb{F}_{13}$.

Aufgabe 1/2/240
Ideale und Teilbarkeit

Index: Ideal, Teiler, größter gemeinsamer Teiler, Ring

Stoffeinheiten: 1/2/29 - 1/2/33 Das Homomorphieprinzip für Ringe

R sei ein kommutativer Ring, $(a) = \{ax \mid x \in R\}$ das von a erzeugte Ideal. Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitseigenschaften:

(1) $a \mid b$ genau dann wenn $(b) \subset (a)$ und $a \sim b$ genau dann, wenn $(a) = (b)$ ($a, b \in R$).

(2) Es sei $d \in R$ so dass $(a) + (b) = (d)$, dann ist d der größte gemeinsame Teiler von a und b.

Aufgabe 1/2/260
Irreduzible Elemente in $\mathbb{Z}[i]$

Index: irreduzibles Ringelement, Irreduzibilität, Primzahl

Stoffeinheiten: 1/2/26 - 1/2/28 Teilbarkeitslehre im Ring der ganzen Zahlen

Bestimmen Sie die irreduziblen Elemente im Ring $\mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 1/2/270 (S: Varianten)
Der größte gemeinsame Teiler als Vielfachensumme

Index: größter gemeinsamer Teiler, Kettendivision, euklidischer Algorithmus

Stoffeinheiten: 1/2/26 - 1/2/28 Teilbarkeitslehre im Ring der ganzen Zahlen

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler für die ganzen Zahlen $f = 344$, $g = 160$ und stellen ihn als Vielfachensumme dieser Zahlen dar.

Lösung. Wir setzen $r_{-1} := f$ und $r_0 := g$. Für $i > 0$ wird mit r_i der i-te Rest bei der Kettendivision bezeichnet. Dann ergibt sich die folgende Tabelle:

$344 : 160 = 2$ Rest 24	$r_{-1} - 2{\cdot}r_0 = r_1$	$r_1 = f - 2g$
$160 : 24 = 6$ Rest 16	$r_0 \quad - 6{\cdot}r_1 = r_2$	$r_2 = -6f + 13g$
$24 : 16 = 1$ Rest 8	$r_1 \quad - 1{\cdot}r_2 = r_3$	$r_3 = 7f - 15g$

Die erste Spalte enthält den euklidischen Algorithmus (vgl. 1/2/26). In der zweiten Spalte sind die Rekursionen der Reste angegeben, d.h. jeder auftretende Rest ist als Vielfachensumme der vorhergehenden ausgedrückt. Die letzte Spalte der Tabelle entsteht aus der zweiten durch Einsetzen der bereits bekannten Ausdrücke und enthält die Darstellung der Reste als Vielfachensummen von f und g. Da r_2 durch r_3 teilbar ist, ergibt sich $r_3 = 8$ als der größte gemeinsame Teiler. Weiter erhalten wir $8 = 7f - 15g$.

Aufgabe 1/2/275 (S: Varianten)

Bestimmung von Inversen in Primkörpern (1)

Index: multiplikatives Inverses, Primkörper, Kettendivision, euklidischer Algorithmus, größter gemeinsamer Teiler

Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

Bestimmen Sie das multiplikative Inverse der Zahl 10 im endlichen Primkörper $\mathbb{F}_{47}$.

Lösung. Der größte gemeinsame Teiler von $f = 47$ und $g = 10$ ist 1, denn f ist Primzahl. Wir stellen 1 als Vielfachensumme von f und g dar. Dazu setzen wir $r_{-1} := f$ und $r_0 := g$. Für $i > 0$ wird mit r_i der Rest bei der i-ten Division bezeichnet. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

$47 : 10 = 4$ Rest 7	$r_{-1} - 4{\cdot}r_0 = r_1$	$r_1 = f - 4g$
$10 : 7 = 1$ Rest 3	$r_0 \quad - 1{\cdot}r_1 = r_2$	$r_2 = -f + 5g$
$7 : 3 = 2$ Rest 1	$r_1 \quad - 2{\cdot}r_2 = r_3$	$r_3 = 3f - 14g$

Die erste Spalte enthält den euklidischen Algorithmus (vgl. 1/2/26). In der zweiten Spalte sind die Rekursionen der Reste angegeben. Die letzte Spalte der Tabelle entsteht aus der zweiten durch Einsetzen der bereits bekannten Ausdrücke und enthält die Darstellung der Reste als Vielfachensummen. Der größte gemeinsame Teiler ist $r_3 = 1$; er ergibt sich als Vielfachensumme

$$1 = 3f - 14g.$$

Bei Übergang zu den Restklassen verschwindet der erste Summand und es folgt in $\mathbb{F}_{47}$ (vgl. 1/2/29)

$-14 = 10^{-1}$.

Aufgabe 1/2/280 (S: Varianten)

Bestimmung von Inversen in Primkörpern (2)

Index: multiplikatives Inverses, Primkörper, Division mit Rest, euklidischer Algorithmus, größter gemeinsamer Teiler, Kettendivision

Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

Für Zahlen $f, g \in \mathbb{Z}$, $g \neq 0$ wird die Division mit Rest in der Form

$f : g = q$ Rest r

angegeben, wobei $f = g \cdot q + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $|\, g \,| > r \geq 0$.

Ausgehend von den Zahlen $r_{-1} := f$, $r_0 := g$, $v_{-1} := 0$, $v_0 := 1$ und mit dem Startindex $i = -1$ führen wir das folgende Verfahren aus:

Berechne $\{$
$i := i + 1$,
$r_{i-1} : r_i = q_{i+1}$ Rest r_{i+1},
falls $\{r_{i+1} \neq 0\}$ $v_{i+1} = v_{i-1} - v_i \cdot q_{i+1}$,
$\}$ **solange** $\{r_{i+1} \neq 0\}$,
$k := i$ (letzter Index),
$u_k = (r_k - v_k \cdot g)/f$.

Das Ergebnis des Verfahrens sind die Zahlen r_k, u_k und v_k.

(i) Zeigen Sie, dass r_k der größte gemeinsame Teiler von f und g ist und $u_k f + v_k g = r_k$.

(ii) Verwenden Sie das obige Verfahren zur Berechnung des multiplikativen Inversen von 5 im endlichen Primkörper $\mathbb{F}_{23}$.

Lösung. (i) Dass r_k größter gemeinsamer Teiler von f und g ist, folgt aus dem euklidischen Algorithmus, der hier nur um die Berechnung der Zahlen u_k und v_k erweitert wurde (das angegebene Verfahren trägt deshalb auch die Bezeichnung *erweiterter euklidischer Algorithmus*).

Um die Darstellung von r_k als Vielfachensumme zu gewinnen, definieren wir $u_{-1} := 1$ und $u_0 := 0$ sowie mit Hilfe zweier Unbestimmter X und Y die Startgrößen $s_{-1} := u_{-1} \cdot X - v_{-1} \cdot Y$ und $s_0 := u_0 \cdot X - v_0 \cdot Y$ aus $\mathbb{Z}[X, Y]$. Nun kann der vertraute euklidische Algorithmus in jedem Schritt um die Berechnung von

$$s_{i+1} = s_{i-1} - s_i \cdot q_{i+1}$$

erweitert werden; es folgt

$$s_{i+1} = u_{i+1} \cdot X - v_{i+1} \cdot Y = (u_{i-1} - u_i \cdot q_{i+1}) \cdot X - (v_{i-1} - v_i \cdot q_{i+1}) \cdot Y.$$

Mit $X = f$ und $Y = g$ gilt $s_i = r_i$. Für alle Reste r_i ist damit eine Darstellung als Vielfachensumme der Ausgangszahlen gewonnen.

Der Kunstgriff und Vorteil des vorliegenden Verfahrens besteht darin, nur die Zahlen v_i zu berechnen; u_k kann dann im letzten Schritt durch Division erhalten werden.

(ii) Das Verfahren ist gut geeignet zur Inversenberechnung in einem endlichen Primkörper. Wir initialisieren r_{-1} mit der Primzahl p und r_0 mit der zu invertierenden Zahl z. Das Verfahren liefert

$$u_k \cdot p + v_k \cdot z = 1.$$

Es folgt $z^{-1} = v_k$ in $\mathbb{F}_p$ (vgl. 1/2/29). Auf die Berechnung von u_k kann hier verzichtet werden.
Um das multiplikative Inverse von 5 in $\mathbb{F}_{23}$ zu bestimmen, wird also

$$r_{-1} = 23,\ r_0 = 5$$

initialisiert. Es entsteht die Tabelle:

$23 : 5 = 4$ Rest 3	$v_{-1} - 4 \cdot v_0 = v_1$	$v_1 = -4$
$5 : 3 = 1$ Rest 2	$v_0 - 1 \cdot v_1 = v_2$	$v_2 = 5$
$3 : 2 = 1$ Rest 1	$v_1 - 1 \cdot v_2 = v_3$	$v_3 = -9$

Wir erhalten als Resultat $5^{-1} = -9$ im Körper $\mathbb{F}_{23}$.

Aufgabe 1/2/290
Chinesischer Restsatz
Index: Ring, teilerfremde Elemente, Isomorphismus von Ringen
Stoffeinheiten: 1/2/29 - 1/2/33 Das Homomorphieprinzip für Ringe

(1) R_1, R_2 seien kommutative Ringe. Zeigen Sie dass $R_1 \times R_2$ ebenfalls ein kommutativer Ring ist mit den komponentenweisen Operationen, die auf den Produkten der Monoide $(R_1, +)$ und $(R_2, +)$ bzw. $(R_1, \cdot)$ und $(R_2, \cdot)$ gegeben sind.

(2) m und n seien teilerfremde Zahlen. Zeigen Sie: Die Ringe $\mathbb{Z}/(mn)$ und $\mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(m)$ sind isomorph. Gilt das auch ohne die Voraussetzung, dass m und n teilerfremd sind?

Aufgabe 1/2/320
Körper mit 4 Elementen
Index: Körper, endlicher Körper
Stoffeinheiten: 1/2/4 - 1/2/5 Integritätsbereiche und Körper

Geben Sie die Strukturtafeln aller Körper mit 4 Elementen an.

Aufgabe 1/2/330
Endliche Körper, Gegenbeispiel
Index: Körper, Charakteristik eines Körpers
Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

Zeigen Sie: Es gibt keinen Körper mit 6 Elementen.

Aufgabe 1/2/340
Der Frobenius-Homomorphismus
Index: Körper, Charakteristik eines Körpers
Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

K sei ein Körper mit $\operatorname{char}(K) = p \neq 0$. Mit F bezeichnen wir die Abbildung $K \to K$, die durch $F(x) := x^p$ definiert ist. Zeigen Sie:

(1) F ist injektiver Ringhomomorphismus.

(2) F ist bijektiv, falls K endlich ist.

(3) Im Fall $K = \mathbb{F}_p$ ist F die Identität.

Aufgabe 1/2/350
Der kleine fermatsche Satz

Index: Körper, Charakteristik eines Körpers

Stoffeinheiten: 1/2/34 - 1/2/36 Primkörper und Charakteristik

K sei ein endlicher Körper mit n Elementen. Zeigen Sie: $a^n - a = 0$ für alle $a \in K$.

Aufgabe 1/3/005 (S: Varianten)
Matrizenmultiplikation, erste Schritte

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Bestimmen Sie das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen A und B für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2,3;\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3,2;\mathbb{R}).$$

Lösung. Ist $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$, so ergibt sich der Eintrag c_{ik} der Produktmatrix $C = A \cdot B$ definitionsgemäß als $c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$. Wir schreiben dies ausführlich auf und erhalten

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} = 0 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 35, \\
c_{21} &= a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} = -2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 25, \\
c_{12} &= a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = 0 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 5 \cdot 5 = 25, \\
c_{22} &= a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} = -2 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 7.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Resultat

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 25 \\ 25 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/010
Eigenschaften der Matrizenmultiplikation

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Überprüfen Sie die folgenden Rechenregeln:

(1) A, B, C seien Matrizen, für die das Produkt $A \cdot (B \cdot C)$ definiert ist. Beweisen Sie, dass dann stets $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ gilt (und insbesondere die rechte Seite dieser Gleichung definiert ist).

(2) Für $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$, $B \in \mathrm{M}(n,p;K)$ gilt ${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B) = {}^{\mathrm{t}}B \cdot {}^{\mathrm{t}}A$.

(3) Für $A \in \mathrm{M}(m,n;K)$, $B \in \mathrm{M}(n,p;K)$ und $a,b \in K$ gilt
$$(a \cdot A) \cdot (b \cdot B) = (ab) \cdot (A \cdot B).$$

Aufgabe 1/3/020

Der Ring der quadratischen Matrizen eines festen Typs

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition, Ring, quadratische Matrix

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

R sei ein kommutativer Ring. Zeigen Sie, dass $\mathrm{M}(n;R)$ mit den Matrizenoperationen $+$ und $\cdot$ ein Ring ist.

Hinweis: Die bereits im Text bewiesenen Eigenschaften der Matrizenoperationen dürfen verwendet werden.

Aufgabe 1/3/030 (S: Varianten)

Matrizenoperationen, Rechenbeispiele (1)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Berechnen Sie für die gegebenen reellen Matrizen A, B in jedem Fall $A+B$, $A-B$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$, sofern die betreffende Operation definiert ist.

(1) $$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(3) $$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ergebnis.

(1) $$A+B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ -2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 28 & -23 \\ -9 & 8 & 8 \\ 9 & 11 & -1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -28 & 9 & 40 \\ 19 & 8 & -16 \\ -24 & 11 & 21 \end{pmatrix}$$

(2) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -6 & -6 \\ 1 & 7 & -8 & -6 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

(3) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 12 & 3 & 9 \\ 12 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Die übrigen Operationen sind nicht definiert.

Aufgabe 1/3/040 (S: Varianten)
Matrizenoperationen, Rechenbeispiele (2)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition
Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Berechnen Sie zu den angegebenen reellen Matrizen A und B jeweils Summe $A + B$, die Differenz $A - B$, sowie die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 5a & -b \\ 5c & -d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -d & b \\ -5c & 5a \end{pmatrix} \text{ wobei } \quad a, b, c, d, \in \mathbb{R}\,.$$

Ergebnis.

(1) $$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},$$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) $$A + B = \begin{pmatrix} 5a - d & 0 \\ 0 & 5a - d \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 5a + d & -2b \\ 10c & -5a - d \end{pmatrix},$$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5bc - 5ad & 0 \\ 0 & 5bc - 5ad \end{pmatrix},$$
$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 5bc - 5ad & 0 \\ 0 & 5bc - 5ad \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/050 (S: Varianten)
Matrizenoperationen, Rechenbeispiele (3)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Berechnen Sie für die folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

die angegebenen Ausdrücke, sofern diese definiert sind.

$A + 3B - 4C$

$A \cdot B \cdot C$

$A \cdot {}^{\mathrm{t}}B \cdot C$

$A \cdot (B + C)$

$C + {}^{\mathrm{t}}A \cdot B$

$A \cdot {}^{\mathrm{t}}A$

${}^{\mathrm{t}}A + A$

${}^{\mathrm{t}}(2A - B)$

${}^{\mathrm{t}}A \cdot A$

${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B + C)$

Ergebnis.

$A + 3B - 4C$ ist nicht definiert.

$A \cdot B \cdot C$ ist nicht definiert.

$A \cdot {}^{\mathrm{t}}B \cdot C$ ist nicht definiert.

$A \cdot (B + C)$ ist nicht definiert.

$C + {}^{\mathrm{t}}A \cdot B$ ist nicht definiert.

$$A \cdot {}^{\mathrm{t}}A = \begin{pmatrix} 17 & -16 & -14 \\ -16 & 20 & 18 \\ -14 & 18 & 21 \end{pmatrix}$$

$${}^{\mathrm{t}}A + A = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^{\mathrm{t}}(2A - B) = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 10 \\ 1 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$${}^{\mathrm{t}}A \cdot A = \begin{pmatrix} 48 & 4 & -12 \\ 4 & 5 & -2 \\ -12 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

${}^{\mathrm{t}}(A \cdot B + C)$ ist nicht definiert.

Aufgabe 1/3/060 (S: Varianten)
Matrizenoperationen, Rechenbeispiele (4)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Berechnen Sie für die gegebenen Matrizen A, B über den Körper $\mathbb{F}_3$ in in jedem der folgenden Fälle $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$ und $B\cdot A$, sofern die betreffende Operation definiert ist.

(1) $$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\-1&-1&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

(2) $$A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1&1&-1\\0&1&1&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

(3) $$A=\begin{pmatrix}0&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Ergebnis.

(1) $$A+B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-1\\-1&1&1\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&-1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix},\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

(2) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&1&0&-1\end{pmatrix}$$

(3) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix},\quad B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Die übrigen Operationen sind nicht definiert.

Aufgabe 1/3/070 (S: Varianten)
Substitution von Matrizen in Polynome

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition, Polynom

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Berechnen Sie die Matrix $f(A)\in \mathrm{M}(3;\mathbb{F}_3)$, wenn $f\in\mathbb{F}_3[X]$ das Polynom $f=-X^2-X+1$ bezeichnet und $A\in M(3;\mathbb{F}_3)$ die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Die Aufgabe ist so zu verstehen, dass $\mathrm{M}(3; \mathbb{F}_3)$ als Algebra über $\mathbb{F}_3$ betrachtet wird; dann ist $f(A)$ das Bild von f beim Ersetzungshomomorphismus $X \mapsto A$. Die Zahl $1 \in \mathbb{F}_3$ entspricht dabei der Einheitsmatrix E_3; so ergibt sich $f(A) = -A^2 - A + 1$ als Summe von

$$-A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/080 (S: Varianten)

Operationen mit polynomialen Matrizen

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Matrizenaddition, polynomiale Matrix

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Bestimmen Sie $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für die folgenden Matrizen $A, B \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_5[X])$,

$$A = \begin{pmatrix} 2X^2 + 2X - 1 & X - 2 \\ X + 2 & 2X^2 + X \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2X^2 + X + 2 & -X^2 + X + 2 \\ -2X^2 - X + 2 & 2X^2 + 2X - 1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis.

$$A + B = \begin{pmatrix} -X^2 - 2X + 1 & -X^2 + 2X \\ -2X^2 - 1 & -X^2 - 2X - 1 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} X + 2 & X^2 + 1 \\ 2X^2 + 2X & -X + 1 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -X^4 - X^3 + 2X^2 + 2X - 1 & -2X^4 + 2X^3 - 2X \\ X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X - 1 & -X^4 - X^2 - 2X - 1 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -X^4 - 2X^2 + 2X + 2 & -2X^4 - 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \\ X^4 + X^3 - 2X + 1 & -X^4 - X^3 - 2X^2 - 2X + 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/090

Potenzen von Matrizen (1)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, obere Dreiecksmatrix

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Potenzen A^n der folgenden Matrix

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}(n;\mathbb{Z}).$$

Aufgabe 1/3/100
Potenzen von Matrizen (2)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Berechnen Sie für $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ die Potenzen A^n der folgenden Matrix

$$A:=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/120
Potenzen von Matrizen (3)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Es sei $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ eine Matrix über einem kommutativen Ring. Wir setzen $\alpha:=a+d$ und $\beta:=bc-ad$. Zeigen Sie:

(i) $A^2=\alpha A+\beta E_2$.

(ii) $A^n=x_nA+\beta x_{n-1}E_2$, und (x_n) ist die Folge, die rekursiv durch $x_n:=\alpha x_{n-1}+\beta x_{n-2}$ für $n\geq 2$ und $x_1=1$, $x_0=0$ definiert ist.

Aufgabe 1/3/130 (S: Varianten)
Potenzen von Matrizen (4)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Berechnen Sie alle Potenzen der folgenden Matrix A über $\mathbb{F}_2$,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Ergebnis. Es ist

$$A^4=E_4\ ,\quad A^1=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&1\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich für beliebige $n\geq 1$ die Matrix A^n als eine der hier aufgeführten.

Aufgabe 1/3/140 (S: Varianten)
Potenzen von Matrizen (5)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{R}).$$

Ist die dritte Potenz von A die Nullmatrix?

Lösung. Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/160 (S: Varianten)
Nilpotente Matrizen (1)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, nilpotente Matrix

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Finden Sie die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $A^n = 0$, wenn A die folgende Matrix über den Körper $\mathbb{F}_2$ bezeichnet,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis. $n = 4$, denn es ist

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/165
Nilpotente Matrizen (2)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, nilpotente Matrix, obere Dreiecksmatrix

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

K sei ein kommutativer Ring. Zeigen Sie: Für eine obere Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 0 & a_{n-1\,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(n;K)$$

mit Nullen auf der Hauptdiagonale ist $A^n = 0$.

Lösung. Induktiv wird ausgerechnet, dass die Matrix $A^m=(a_{ij}^{(m)})$ nur Einträge $a_{ij}^{(m)}=0$ hat für $j-i<m$ und $m=1,\dots,n$.
Induktionsanfang $m=1$ ist die Voraussetzung, und aus $A^{m+1}=A^m\cdot A$ ergibt sich für $k-i<m+1$, d.h. für $k-i\le m$,

$$a_{ik}^{(m+1)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^{(m)}\cdot a_{jk}=\sum_{j=1}^{m+i-1}a_{ij}^{(m)}\cdot a_{jk}+\sum_{j=m+i}^{n}a_{ij}^{(m)}\cdot a_{jk}.$$

Der erste Summand verschwindet nach der Induktionsvoraussetzung $a_{ij}^{(m)}=0$ für $j-i<m$, der zweite ist 0, weil aus $j\ge m+i$ $\left(\text{und } m\ge k-i\right)$ folgt $j\ge k$. ❑

Aufgabe 1/3/170
Matrizen mit Parametern (1)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

A und B seien quadratische Matrizen über einem kommutativen Ring. Vorausgesetzt wird $A\cdot B=B\cdot A$.

(1) Zeigen Sie :

$$(A+B)^n=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}A^i\cdot B^{n-i}.$$

(2) Berechnen Sie für $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ die Potenzen der Matrix

$$\begin{pmatrix}\alpha+\beta & 0 & \beta\\ 0 & \alpha & 0\\ \beta & 0 & \alpha+\beta\end{pmatrix}\in M(3;\mathbb{R}).$$

Aufgabe 1/3/180
Matrizen mit Parametern (2)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, obere Dreiecksmatrix

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Es sei $x\in\mathbb{R}$ und

$$A(x):=\begin{pmatrix}1 & x & \frac{x^2-x}{2}\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}(4;\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass $A(x+y)=A(x)\cdot A(y)$ ist für alle $x,y\in\mathbb{R}$ und bestimmen Sie $A(x)^n$ für alle $n\in\mathbb{N}$.

Aufgabe 1/3/190 (S: Varianten)
Gruppen von Matrizen (1)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

(1) Zeigen Sie, dass die Menge $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Q} \right\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

(2) Lösen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

die Gleichungen $A \cdot X = B$, $Y \cdot A = B$, wobei X, Y Matrizen aus G sind.

(3) Lösen Sie für die zuvor angegebenen Matrizen A, B und eine weitere Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

die Gleichung $A \cdot Z \cdot B = C$.

Ergebnis. Wir geben die Lösungen der Rechenaufgaben (2) und (3) an. Die unbekannten Matrizen X, Y und Z sind leicht aus den angegebenen Bedingungen zu ermitteln. Bezeichnen wir z.B. mit x_1, x_2 die Einträge der ersten Spalte von X, so ergeben sich aus $A \cdot X = B$ die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

aus denen $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ abzulesen ist. Insgesamt erhalten wir

(2) $$X = Y = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(3) $$Z = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/200 (S: Varianten)

Gruppen von Matrizen (2)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Es sei

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{F}_3 \right\}.$$

(1) Beweisen Sie, daß die Menge G mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet und bestimmen Sie ihre Ordnung.

(2) Lösen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

die Gleichungen $A \cdot X = B$, $Y \cdot A = B$, wobei X, Y Matrizen aus G sind.

Ergebnis. Wir geben das Resultat der Rechenaufgabe (2) an, das leicht folgt, indem beispielsweise die Einträge beider Seiten der Bedingung $A{\cdot}X = B$ aufgeschrieben werden. Bezeichnen wir z.B. mit x_1, x_2, x_3 die Einträge der ersten Spalte von X, so ergeben sich die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}\right\},$$

aus denen $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ abzulesen ist usw. Insgesamt erhalten wir

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1/3/210
Ein Körper mit 9 Elementen

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Körper

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Es sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{F}_3 \right\}$. Beweisen Sie, dass M mit der Addition und Multiplikation von Matrizen einen Körper mit 9 Elementen bildet.

Anleitung. Berechnen Sie die Potenzen von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1/3/220
Matrizen und Drehungen

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Isomorphismen von Gruppen, komplexe Zahlen

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Für $\varphi \in R$ setzen wir $\mathrm{M}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

(1) $$\mathrm{M}(\varphi) \cdot \mathrm{M}(\psi) = \mathrm{M}(\varphi + \psi)$$
Schließen Sie daraus, dass $G = \{\mathrm{M}(\varphi) \mid \varphi \in R\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

(2) $S^1 := \{z \mid z \in \mathbb{C}, \mid z \mid = 1\}$ bezeichne den Einheitskreis. Er bildet mit der Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe $(S^1, \cdot)$, die zu G isomorph ist.

Aufgabe 1/3/230
Matrizen und Permutationen

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Gruppe, Permutationsgruppe, Isomorphismen von Gruppen

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Wir setzen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $G = \{A^i \cdot B^j \mid i = 0, 1, 2\,,\ j = 0, 1\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet, die zur Permutationsgruppe S_3 isomorph ist.

Aufgabe 1/3/240

Matrizen und die Diedergruppe

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Es seien A und B die durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Matrizen aus $\mathrm{M}(2;\mathbb{R})$.

Überprüfen Sie, dass $A^4 = \mathrm{E}_2$, $B^2 = \mathrm{E}_2$, $B \cdot A = A^3 \cdot B$ ist und beweisen Sie, dass die Menge

$$G = \{A^i \cdot B^j \mid i = 0, \dots, 3,\ j = 0, 1\}$$

mit der Matrizenmultiplikation eine 8-elementige Gruppe bildet. Geben Sie die Strukturtafel für G an.

Aufgabe 1/3/250

Matrizen und Quaternionen

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

Mit $I, J \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ bezeichnen wir die Matrizen $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ und $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie die folgenden Eigenschaften:

(1) $I^4 = J^4 = \mathrm{E}_2$ und $J \cdot I = I^3 \cdot J$.

(2) $Q_8 := \{J^n \cdot I^m \mid n = 0, \dots, 3,\ m = 0, 1\}$ ist eine Gruppe mit 8 Elementen (die *Quaternionengruppe*).

Aufgaben zum Kapitel 2

Aufgabe 2/1/010 (S: Varianten)
Nullstellenmengen von Polynomen (1)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Berechnen Sie die Nullstellenmenge $V(\{f_1, f_2\}) \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei f_1 und f_2 die folgenden Polynome sind:

$$f_1 = X_1 + X_2 - 2\,, \quad f_2 = X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 + X_2 - 6$$

Lösung. (x_1, x_2) sei eine Nullstelle. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x_2 = -x_1 + 2$, dann aus der zweiten $3x_1^2 - 7x_1 = 0$, folglich

$$V(\{f_1, f_2\}) = \left\{(0, 2), \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Aufgabe 2/1/015 (S: Varianten)
Nullstellenmengen von Polynomen (2)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Berechnen Sie die Nullstellenmenge $V(\{f_1, f_2\}) \subseteq \mathbb{R}^2$, wobei f_1 und f_2 die folgenden Polynome sind:

$$f_1 = X_1^2 - X_2^2 + X_1 + X_2, \quad f_2 = X_1^3 + X_1^2X_2 - X_1X_2 - X_2 + 1$$

Lösung. Für eine Nullstelle (x_1, x_2) erhalten wir aus der ersten Gleichung $x_2 = x_1 + 1$ oder $x_2 = -x_1$, dann aus der zweiten $2x_1^3 - 2x_1 = 0$ oder (im zweiten Fall) $x_1^2 + x_1 + 1 = 0$. Die erste dieser beiden Gleichungen für x_1 hat die Lösungen $-1, 0, 1$, woraus sofort $x_2 = 0, 1$ bzw. 2 folgt. Im zweiten Fall ist entsprechend vorzugehen.

Aufgabe 2/1/020
Eigenschaften von Nullstellenmengen (1)

Index: Nullstellenmenge, Polynom, Ideal, Nullstellenmenge eines Ideals

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

f_1, f_2 seien Polynome in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Wir bezeichnen mit I die Menge $I := \{q_1f_1 + q_2f_2 \mid q_1, q_2 \in K[X_1, \ldots, X_n]\}$; dies ist *das von f_1 und f_2 erzeugte Ideal* in $K[X_1, \ldots, X_n]$. Zeigen Sie:

$$V(I) = V(\{f_1, f_2\}).$$

(Es führt daher nicht zu Verwechslungen, wenn $V(f_1, f_2)$ anstelle von $V(\{f_1, f_2\})$ geschrieben wird.)

Aufgabe 2/1/030
Eigenschaften von Nullstellenmengen (2)

Index: Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Überprüfen Sie, dass für beliebige Mengen F und G von Polynomen aus $K[X_1, \ldots, X_n]$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $V(F \cup G) = V(F) \cap V(G)$,

(2) $F \subseteq G \Longrightarrow V(F) \supseteq V(G)$,

(3) $V(F \cap G) \supseteq V(F) \cup V(G)$,

(4) $1 \in F \Longrightarrow V(F) = \emptyset$,

(5) $V(\{0\}) = V(\emptyset) = K^n$.

Aufgabe 2/1/040 (S: Varianten)

Nullstellenmengen von Polynomen (3)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Bestimmen Sie die folgenden Nullstellenmengen von Polynomen über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

(1) $V(\{X_1^2 + X_1 + X_3^2 + 1, X_1^2X_3 + X_1X_3\}) \subseteq \mathbb{F}_2^3$.
(2) $V(\{X_1^2 + X_1X_3 + X_1 + 1, X_1X_2 + X_1X_3X_4 + X_2X_3^2, X_1X_2 + X_2^2\}) \subseteq \mathbb{F}_2^4$.

Lösung. Da die Lösungen in einer endlichen Menge zu suchen sind, lassen sie sich durch systematisches Probieren ermitteln. Wir setzen alle Tripel bzw. Quadrupel aus Elementen von $\mathbb{F}_2$ ein und erhalten

Fall (1): $V = \{(0,0,1), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)\}$
Fall (2): $V = \{(1,0,1,0), (1,1,1,0)\}$

Aufgabe 2/1/050 (S: Varianten)

Nullstellenmengen von Polynomen (4)

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Berechnen Sie die folgenden Nullstellenmengen über dem Körper $\mathbb{F}_3$.

(1) $V(\{-X_1^3 - X_1X_2 - X_1, X_1^2 - X_2^2 - X_2 + 1\}) \subseteq \mathbb{F}_3^2$.
(2) $V(\{-X_1 + X_3, X_1X_2^2X_3 + X_1 + X_2^3 + X_3^2\}) \subseteq \mathbb{F}_3^3$
(3) $V(\{-X_1X_2 - X_2^2\}) \subseteq \mathbb{F}_3^2$

Lösung. Die Aufgabe ist durch systematisches Probieren lösbar. Es ergibt sich

Fall (1): $V = \{(1,1), (2,1)\}$

Fall (2):
$V = \{(0,0,0), (0,1,0), (0,2,0), (1,0,1), (1,1,1), (1,2,1), (2,0,2), (2,1,2), (2,2,2)\}$

Fall (3): $V = \{(0,0), (1,0), (2,0), (2,1), (1,2)\}$

Aufgabe 2/1/060

Veranschaulichung von Nullstellenmengen

Index: Nullstellenmenge, Polynom

Stoffeinheiten: 2/1/1 - 2/1/2 Der Begriff des Gleichungssystems

Wir betrachten die reellen Polynome

$$f_1 = X - 3Y + 5 \quad \text{und} \quad f_2 = X^2 + Y^2 - 5.$$

Skizzieren Sie die Nullstellenmengen $V(\{f_1\})$, $V(\{f_2\})$ und $V(\{f_1, f_2\})$ in $\mathbb{R}^2$. Beweisen und interpretieren Sie an diesem Bild die Formel

$$V(\{f_1, f_2\}) = V(\{f_1\}) \cap V(\{f_2\}).$$

Aufgabe 2/1/070 (S: Varianten)

Lineare Gleichungen, erste Schritte (1)

Index: lineares Gleichungssystem, Zeilenstufenform, Lösungsmenge eines Gleichungssystems

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{R}$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, für die folgende Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung. Stufenindizes sind 1 und 2. Entsprechend der verbleibenden Position setzen wir einen Parameter $x_3 = 4t \in \mathbb{R}$ ein. (Wir hätten natürlich auch $x_3 = t$ wählen können; durch den Trick mit dem Faktor wollen wir uns das Rechnen mit einigen Brüchen ersparen. Wir finden ihn, indem wir die Koeffizienten der „Stufenvariablen“ betrachten.)

Nach Umstellen der zweiten Gleichung ergibt sich

$x_2 = 2t + \frac{1}{2}$, sowie durch Einsetzen in die erste

$x_1 = -3t + \frac{1}{2}$, folglich

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (-3t + \frac{1}{2}, 2t + \frac{1}{2}, 4t) \\ &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + t\cdot(-3, 2, 4). \end{aligned}$$

Der gaußsche Algorithmus zeigt, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden wurde, wir erhalten damit die Lösungsmenge des Gleichungssystems als

$$\left\{ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) + t\cdot(-3, 2, 4) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 2/1/080 (S: Varianten)

Lineare Gleichungen, erste Schritte (2)

Index: lineares Gleichungssystem, Zeilenstufenform, Lösungsmenge eines Gleichungssystems

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Lösen Sie über dem Grundkörper der reellen Zahlen das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - 7x_4 &= -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Lösung. Da der Koeffizient von x_1 in der ersten Gleichung verschwindet, wird diese zunächst mit der zweiten vertauscht, was auf die Lösungsmenge keinen Einfluss hat.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ -4x_1 - x_2 - 4x_3 - 7x_4 &= -8 \\ -x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Nun können Vielfache der ersten Gleichung von den folgenden subtrahiert werden, so dass in diesen die Koeffizienten vor x_1 verschwinden.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ -x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 16 \\ 5x_2 + x_3 + 5x_4 &= 11 \end{aligned}$$

Entsprechend wird das aus der zweiten bis vierten Gleichung bestehende Teilsystem umgeformt:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 5x_3 + 7x_4 &= 12 \\ 16x_3 + 15x_4 &= 31 \end{aligned}$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Gleichung mit 16 bzw. 5 multipliziert. Das so entstehende System

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 80x_3 + 112x_4 &= 192 \\ 80x_3 + 75x_4 &= 155 \end{aligned}$$

wird durch Subtraktion der dritten Gleichung von der vierten in ein System in Stufenform überführt.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 4x_4 &= 6 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 80x_3 + 112x_4 &= 192 \\ -37x_4 &= -37 \end{aligned}$$

Wir erhalten zunächst aus der letzten Gleichung $x_4 = 1$; entsprechend ergeben sich die übrigen x_i durch Einsetzen in die vorhergehenden, also

$$x_3 = \frac{1}{80} \cdot (192 - 112x_4) = \frac{1}{80} \cdot (192 - 112) = 1 \text{ usw.}$$

Die Lösungsmenge des Systems ist

$\{(-1,1,1,1)\}$.

Anmerkung. Das hier verwendete Verfahren ist eine Variante des gaußschen Algorithmus, bei der durch Multiplikation mit geeigneten von 0 verschiedenen ganzen Zahlen vermieden wurde, dass Brüche als Koeffizienten auftreten.
Der Fall, dass ein Gleichungssystem mit quadratischer reeller Koeffizientenmatrix genau eine Lösung hat, kann als „allgemein“ angesehen werden, da er für „fast beliebige“ Koeffizienten auftritt. Sonst kann die Lösungsmenge leer oder unendlich sein.

Aufgabe 2/2/010 (S: Varianten)
Lineare Gleichungssysteme in Stufenform

Index: lineares Gleichungssystem, lineares Gleichungssystem in Stufenform, Zeilenstufenform, Stufenindizes

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} -x_1+2x_2+x_3-x_4-2x_5&=0\\ -x_3-x_4-2x_5&=0\\ -x_4+x_5&=-1 \end{aligned}$$

Lösung. Wir setzen Parameter $t_1,\, t_2\in\mathbb{R}$ für die beiden Unbestimmten ein, die an keiner Stufenposition vorkommen.
„Von unten“ beginnend ergibt sich durch schrittweise Substitution nun (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) in Abhängigkeit von den Zahlen t_i. Durch Umstellen erhalten wir die Lösungsmenge
$\{(-2,0,-1,1,0)+t_1\cdot(2,1,0,0,0)+t_2\cdot(-6,0,-3,1,1)\mid t_1\,,\,t_2\in\mathbb{R}\}$.

Aufgabe 2/2/020 (S: Varianten)
Lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{F}_3$

Index: lineares Gleichungssystem, lineares Gleichungssystem in Stufenform, Zeilenstufenform, Stufenindizes

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) aus $\mathbb{F}_3^5$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} -x_1-x_4+x_5&=-1\\ x_3+x_5&=0\\ x_4-x_5&=1 \end{aligned}$$

Lösung. Wir setzen Parameter $t_1,\, t_2\in\mathbb{F}_3$ für die beiden Unbestimmten ein, die an keiner Stufenposition vorkommen.
„Von unten“ beginnend ergibt sich durch schrittweise Substitution nun (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) in Abhängigkeit von den Zahlen t_i. Durch Umstellen erhalten wir die Lösungsmenge

$\{(0,0,0,1,0)+t_1\cdot(0,1,0,0,0)+t_2\cdot(0,0,-1,1,1)\mid\ t_1\,,\ t_2\in\mathbb{F}_3\}\subseteq\mathbb{F}_3^5.$

Aufgabe 2/2/030 (S: Varianten)
Lineare Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten (1)

Index: lineares Gleichungssystem, lineares Gleichungssystem in Stufenform, Zeilenstufenform, Stufenindizes

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Lösen Sie das folgende (bereits in Zeilenstufenform vorliegende) Gleichungssystem über $\mathbb{C}$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$, so dass die angegebenen Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned}-(2i-1)x_1-(i+1)x_2-2ix_3&=0\\ -ix_2+2ix_3&=-2i\end{aligned}$$

Lösung. Stufenindizes sind 1 und 2. Entsprechend der verbleibenden Position setzen wir einen Parameter $x_3=5t\in\mathbb{C}$ ein. (Wir hätten natürlich auch $x_3=t$ wählen können; durch den Trick wollen wir uns das Rechnen mit einigen Brüchen ersparen. Wir finden einen geeigneten Faktor, indem wir die Koeffizienten der „Stufenvariablen“ betrachten.) Nach Umstellen der zweiten Gleichung ergibt sich

$x_2=10t+2$, sowie durch Einsetzen in die erste

$x_1=(8i-6)t+(\frac{6}{5}i-\frac{2}{5})$, folglich

$$\begin{aligned}(x_1,x_2,x_3)&=((8i-6)t+(\frac{6}{5}i-\frac{2}{5}),10t+2,5t)\\ &=((\frac{6}{5}i-\frac{2}{5}),2,0)+t\cdot((8i-6),10,5).\end{aligned}$$

Wir haben eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden und erhalten damit die Lösungsmenge des Gleichungssystems als

$$\left\{((\frac{6}{5}i-\frac{2}{5}),2,0)+t\cdot((8i-6),10,5)\,\middle|\ t\in\mathbb{C}\right\}\subseteq\mathbb{C}^3.$$

Aufgabe 2/2/040 (S: Varianten)
Einfache Fälle linearer Gleichungssysteme

Index: lineares Gleichungssystem, lineares Gleichungssystem in Stufenform, Zeilenstufenform, Stufenindizes

Stoffeinheiten: 2/2/1 - 2/2/6 Transformation in eine Stufenform

Bestimmen Sie die Menge aller $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, für die das jeweilige Gleichungssystem erfüllt ist.

$$(1)\quad\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=2\\ \qquad x_1+x_2=-1\\ \qquad -x_2+x_3=1\end{cases}$$

$$(2)\quad\begin{cases}x_1-x_2-x_3=-1\\ \qquad x_2+x_3=0\end{cases}$$

Ergebnis. Die Lösungsmengen der Systeme sind

(1) $\{(-1,0,1)\}$ bzw.

(2) $\{(-1,0,0)+t\cdot(0,-1,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$.

Aufgabe 2/2/060 (S: Varianten)

Lineare Gleichungssysteme über $\mathbb{F}_7$

Index: lineares Gleichungssystem, erweiterte Koeffizientenmatrix, gaußscher Algorithmus

Stoffeinheiten: 2/2/7 - 2/2/13 Beschreibung eines linearen Gleichungssystems durch Matrizen und reduzierte Form

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_7$, wobei die Koeffizienten durch die Struktur von $\mathbb{F}_7$ als $\mathbb{Z}$-Algebra gegeben sind.

$$\begin{aligned}
44x_1+61x_2+47x_3+20x_4&=-60\\
-30x_1+8x_2-41x_3-34x_4&=14\\
40x_1-63x_2+13x_3-22x_4&=61\\
75x_1-44x_2+57x_3-82x_4&=-74
\end{aligned}$$

Lösung. Nach geeigneter Reduktion der Koeffizienten $\mathrm{mod}(7)$ erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
2x_1-2x_2-2x_3-x_4&=3\\
-2x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\
-2x_1-x_3-x_4&=-2\\
-2x_1-2x_2+x_3+2x_4&=3
\end{aligned}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2&-2&-2&-1&3\\ -2&1&1&1&0\\ -2&0&-1&-1&-2\\ -2&-2&1&2&3 \end{pmatrix}$$

des Systems wird mit dem gaußschen Algorithmus umgeformt; wir erhalten die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2&-2&-2&-1&3\\ 0&-1&-1&0&3\\ 0&0&-1&-2&2\\ 0&0&0&2&0 \end{pmatrix}$$

eines äquivalenten Systems. Daraus ergibt sich leicht $\{(2,-1,-2,0)\}$ als Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems.

Aufgabe 2/2/070

Anzahl der Lösungen einiger linearer Gleichungssysteme über $\mathbb{F}_2$

Index: lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge

Stoffeinheiten: 2/1/3 - 2/1/6 Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in Stufenform

Wir fixieren den 2-elementigen Grundkörper $\mathbb{F}_2=\mathbb{Z}/(2)$.

(1) Lösen Sie das folgende System:

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+z&=1 \end{aligned}$$

(2) Wieviele Lösungen hat die folgende Gleichung?

$$x+y+z+u+v+w=1$$

(3) $a_1,\dots,a_n,b\in\mathbb{F}_2$ und $n\geq 1$ seien beliebig. Wieviele Lösungen hat das folgende Gleichungssystem? (Vorsicht!)

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n=b$$

Aufgabe 2/2/080 (S: Varianten)
Lineare Gleichungssysteme in der Charakteristik 0, 3, 5

Index: lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge, erweiterte Koeffizientenmatrix, gaußscher Algorithmus, Charakteristik eines Körpers

Stoffeinheiten: 2/2/1 - 2/2/6 Transformation in eine Stufenform

Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1-2x_2-7x_3-6x_4&=5\\ -4x_1-6x_2+4x_3+2x_4&=10\\ 10x_2-x_3-10x_4&=-9\\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4&=-3 \end{aligned}$$

über dem Körper K in jedem der folgenden Fälle

(1) $\mathrm{char}(K)=0$,

(2) $\mathrm{char}(K)=5$,

(3) $\mathrm{char}(K)=3$.

Beachten Sie, dass das Symbol für eine ganze Zahl n auch als Bezeichnung für das Element $n\cdot 1\in K$ verwendet wird.

Ergebnis.

(1) $\{(-2,-1,-1,0)\}$,

(2) $\{(-1,0,-1,0)+t_1\cdot(1,1,0,0)+t_2\cdot(-2,0,0,1)\mid t_1,\,t_2\in K\}$,

(3) $\{(1,-1,-1,0)+t_1\cdot(1,0,-1,1)\mid t_1\in K\}$.

Aufgabe 2/2/090 (S: Varianten)
Lineare Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten (2)

Index: lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge, erweiterte Koeffizientenmatrix, gaußscher Algorithmus

Stoffeinheiten: 2/2/7 - 2/2/13 Beschreibung eines linearen Gleichungssystems durch Matrizen und reduzierte Form

Lösen Sie das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{C}$, d.h. bestimmen Sie die Menge aller $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ für die folgende Bedingungen erfüllt sind.

$$\begin{aligned} -x_1 - (i-1)x_2 - ix_3 &= -(i-1) \\ -ix_1 - (i-1)x_2 - ix_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung. Mit dem gaußschen Algorithmus wird die erweiterte Koeffizientenmatrix des Systems in die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -1 & -(i-1) & -i & -(i-1) \\ 0 & -2i & -(i+1) & -i \end{pmatrix}$$

überführt. Stufenindizes sind 1 und 2. Entsprechend der verbleibenden Position setzen wir einen Parameter $x_3 = 2t \in \mathbb{C}$ ein. (Wir hätten natürlich auch $x_3 = t$ wählen können; durch den Trick wollen wir uns das Rechnen mit einigen Brüchen ersparen. Wir finden einen geeigneten Faktor, indem wir die Koeffizienten der „Stufenvariablen" betrachten.) Nach Umstellen der zweiten Gleichung ergibt sich

$x_2 = (i-1)t + \frac{1}{2}$, sowie durch Einsetzen in die erste

$x_1 = (\frac{1}{2}i - \frac{1}{2})$, folglich

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= ((\tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}), (i-1)t + \tfrac{1}{2}, 2t) \\ &= ((\tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{2}, 0) + t\cdot(0, (i-1), 2). \end{aligned}$$

Der gaußsche Algorithmus zeigt, dass eine notwendige und hinreichende Bedingung gefunden wurde, wir erhalten damit die Lösungsmenge des Gleichungssystems als

$$\left\{ ((\tfrac{1}{2}i - \tfrac{1}{2}), \tfrac{1}{2}, 0) + t\cdot(0, (i-1), 2) \;\middle|\; t \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^3.$$

Aufgabe 2/2/100 (S: Varianten)

Lineare Gleichungssysteme mit Parametern (1)

Index: lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge, gaußscher Algorithmus

Stoffeinheiten: 2/2/1 - 2/2/6 Transformation in eine Stufenform

Lösen Sie für eine feste Zahl $c \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ -2x_1 + (c-1)x_2 + cx_3 &= (c-1) \\ -2x_1 + (2c-4)x_2 + 2cx_3 &= (2c-10) \end{aligned}$$

Lösung. Mit dem gaußschen Algorithmus erhalten wir leicht das folgende äquivalente System:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ (c-3)x_2 + (c-2)x_3 &= (c-5) \\ 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Im Falle $c \neq 3$ ergibt sich daraus die Lösungsmenge

$\{(-1, 3, -2)\}$,

sowie für $c = 3$

$\{(-4, 0, -2) + t\cdot(1, 1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 2/2/110 (S: Varianten)

Lineare Gleichungssysteme mit Parametern (2)

Index: lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge

Stoffeinheiten: 2/2/1 - 2/2/6 Transformation in eine Stufenform

Lösen Sie für eine feste Zahl $c \in \mathbb{R}$ das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 - (c-1)x_2 + (c-2)x_3 &= (c-3) \\ 2x_1 - (c+1)x_2 + (4c-10)x_3 &= (2c-9) \end{aligned}$$

Lösung. Durch eine einfache Zeilenoperation erhalten wir ein äquivalentes System in Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} x_1 - (c-1)x_2 + (c-2)x_3 &= (c-3) \\ (c-3)x_2 + (2c-6)x_3 &= -3 \end{aligned}$$

Daraus sind die Lösungsmengen leicht abzulesen, dies sind falls $c \neq 3$

$$\left\{ \left(\frac{(c^2-9c+12)}{(c-3)}, \frac{-3}{(c-3)}, 0 \right) + t \cdot (-(3c-4), -2, 1) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

sowie für $c = 3$ die leere Menge.

Aufgabe 2/2/130

Rechnen mit Näherungen

Index: lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge

Stoffeinheiten: 2/2/7 - 2/2/13 Beschreibung eines linearen Gleichungssystems durch Matrizen und reduzierte Form

Bestimmen Sie in $\mathbb{R}^3$ jeweils die Anzahl der Lösungen (x, y, z) des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + wy &= 1 \\ wx + 3y &= 2 \\ 2y + wz &= 3, \end{aligned}$$

wobei w eine der folgenden drei Zahlen ist.

(1) $w = \sqrt{3}$,

(2) $w = 1,7320508075688772935274463415058723669428$,

(3) $w = 0$.

Aufgabe 2/2/140 (S: Varianten)

Matrizengleichungen

Index: lineares Gleichungssystem, Lösungsmenge

Stoffeinheiten: 2/2/1 - 2/2/6 Transformation in eine Stufenform

Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, das zur Bedingung

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist und lösen Sie dieses System.

Lösung. Wir erhalten das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -3x_1 &= 6 \\ -3x_2 &= 6 \\ 3x_1 + x_3 &= -7 \\ 3x_2 + x_4 &= -6\,, \end{aligned}$$

dessen Lösung sich leicht als $x_1 = -2,\ \ x_2 = -2,\ \ x_3 = -1,\ \ x_4 = 0$ ergibt.

Aufgabe 2/2/150 (S: Varianten)

Stufentransformation für Matrizen

Index: lineares Gleichungssystem, Zeilenstufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/2/7 - 2/2/13 Beschreibung eines linearen Gleichungssystems durch Matrizen und reduzierte Form

Überführen Sie mit Hilfe des gaußschen Algorithmus die folgenden Matrizen (über den jeweils angegebenen Grundkörpern) in äquivalente Zeilenstufenmatrizen.

(1) $$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & -8 & 10 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4,3;\mathbb{R}),$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0&1&0&1&0 \\ 1&1&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(5;\mathbb{F}_2),$$

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3,4;\mathbb{F}_5).$$

Ergebnis. Wir erhalten in den jeweiligen Fällen

(1) $$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & -28 & 19 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

(3) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/010 (S: Varianten)

Rangbestimmung, erste Schritte

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Stufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Überführen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -4 & -2 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

durch Zeilentransformationen in eine obere Dreiecksmatrix und geben Sie ihren Rang an.

Lösung. $a_{11} = 0,$ daher wird zunächst die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Wir erhalten

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -3 & -6 \\ -1 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nun können Vielfache der ersten Zeile von den folgenden subtrahiert werden, so dass die übrigen Einträge der ersten Spalte verschwinden. Entsprechend wird mit der zweiten Zeile verfahren; wir erhalten zeilenäquivalente Matrizen

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Zeile der zuletzt aufgetretenen Matrix mit $-3,$ bzw. $7,$ multipliziert; entsprechend ergibt sich sich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -21 & -6 \\ 0 & 0 & -21 & 77 \end{pmatrix},$$

daher nach Subtraktion der dritten Zeile von der vierten

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -21 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 83 \end{pmatrix}.$$

Es entsteht eine Stufenmatrix mit vier Zeilenstufen, daher ist

$$\operatorname{rang}(A) = 4.$$

Tatsächlich lässt sich zeigen, dass hier der allgemeine Fall vorliegt; eine Matrix aus $\mathrm{M}(n; \mathbb{R})$ hat „fast immer" den Rang n.

Das hier verwendete Verfahren ist eine Variante des gaußschen Algorithmus. Es ist allgemein ausführbar und beruht auf der Hintereinanderausführung von Zeilentransformationen der folgenden Art:

(1) Addition des Vielfachen einer Zeile von A zu einer anderen,

(2) Multiplikation einer Zeile der Matrix A mit einer Zahl $c \neq 0$,

(3) Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A.

Aufgabe 2/3/011 (S: Varianten)
Rangbestimmung, einfache Beispiele

Index: Matrix, Rang einer Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang jeder der folgenden reellen Matrizen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis. Wir erhalten durch Zeilen- und Spaltentransformationen Stufenmatrizen, aus denen sich leicht der Rang ablesen lässt. Es ist $\operatorname{rang}(A_1) = 3$, $\operatorname{rang}(A_2) = 2$, $\operatorname{rang}(A_3) = 2$.

Aufgabe 2/3/020 (S: Varianten)
Rangbestimmung, Beispiele aus $\mathrm{M}(4; \mathbb{R})$

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Stufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang jeder der folgenden reellen Matrizen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & -6 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis. Wir erhalten durch Zeilen- und Spaltentransformationen Stufenmatrizen, aus denen sich leicht der Rang ablesen lässt. Es ist $\operatorname{rang}(A_1) = 2$, $\operatorname{rang}(A_2) = 4$

Aufgabe 2/3/030 (S: Varianten)
Rangbestimmung, Beispiele über $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Stufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & -8 & -6 \end{pmatrix},$$

wenn diese als Matrix

(1) über dem Körper $\mathbb{R}$,

(2) über dem Körper $\mathbb{F}_3$ bzw.

(3) über dem Körper $\mathbb{F}_2$

aufgefasst wird.

Ergebnis.

(1) $\operatorname{rang}_{\mathbb{R}}(A) = 3$,

(2) $\operatorname{rang}_{\mathbb{F}_3}(A) = 2$,

(3) $\operatorname{rang}_{\mathbb{F}_2}(A) = 1$.

Aufgabe 2/3/040 (S: Varianten)
Rangbestimmung, Beispiele mit einem Parameter

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Stufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & t & t \\ 0 & (t+3) & (2t+6) & 0 & (2t+6) \\ -2 & -(2t+4) & -(4t+13) & -t & -(5t+12) \end{pmatrix}$$

aus $\mathrm{M}(3,5;\mathbb{R})$ für beliebige Zahlen $t \in \mathbb{R}$.

Lösung. $A(t)$ ist zeilenäquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & t & t \\ 0 & (t+3) & (2t+6) & 0 & (2t+6) \\ 0 & 0 & 1 & t & t \end{pmatrix},$$

daher folgt $\operatorname{rang}(A(t)) = 3$ für $t \neq -3$. Anderenfalls ist $\operatorname{rang}(A(t)) = 2$.

Aufgabe 2/3/050 (S: Varianten)
Rangbestimmung, Beispiele mit zwei Parametern

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Stufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix in Abhängigkeit von den Parametern $s, t \in \mathbb{R}$.

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} s & (s-2t) & -(s+t) \\ s & (2s-5t) & -(3s+3t) \\ s & t & (2s+2t) \end{pmatrix}.$$

Lösung. $A(s,t)$ ist zeilenäquivalent zur Matrix

$$\begin{pmatrix} s & (s-2t) & -(s+t) \\ 0 & (s-3t) & -(2s+2t) \\ 0 & 0 & (s+t) \end{pmatrix}.$$

Daraus ergeben sich zunächst die folgenden Möglichkeiten.

$s = t = 0$: $A = 0$, $\operatorname{rang}(A(s,t)) = 0$,

$s = 0,\ t \neq 0$: $\operatorname{rang}(A(s,t)) = 2$,

$s = 3t \neq 0$: $\operatorname{rang}(A(s,t)) = 2$,

$s = -t \neq 0$: $\operatorname{rang}(A(s,t)) = 2$.

In allen anderen Fällen ist $\operatorname{rang}(A(s,t)) = 3$.

Aufgabe 2/3/060

Rangbestimmung, Beispiele mit 3 Parametern

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Stufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

a, b, c seien reelle Zahlen. Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/070

Rangbestimmung für einige spezielle Matrizen

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Permutationsmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Überprüfen Sie die folgenden Behauptungen für Matrizen über dem Körper K.

(1) A sei die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in K$. Dann gilt $\operatorname{rang}(A) = n - |\{i \mid a_i = 0\}|$.

(2) Eine obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

hat genau dann den Rang n, wenn $a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} \neq 0$.

(3) B sei eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_1 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i, b_j \in K$, wobei wenigstens eine der Zahlen a_i und wenigstens eine der Zahlen b_j von Null verschieden sind. Dann hat die Matrix B den Rang 1.

(4) Permutationsmatrizen aus $\mathrm{M}(n; K)$ haben den Rang n.

Aufgabe 2/3/080

Rangbestimmung, ein Beispiel mit irrationalen Koeffizienten

Index: Matrix, Rang einer Matrix, Stufenmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 2 & \sqrt{3}+1 & \sqrt{2} \\ 2+2\sqrt{3} & 5+\sqrt{6}+\sqrt{3} & 2\sqrt{6} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2/3/090 (S: Varianten)
Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Index: Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems, Rang einer Matrix, Satz von Kronecker-Capelli

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Entscheiden Sie mit Hilfe des Satzes von Kronecker-Capelli, welches der folgenden Gleichungssysteme lösbar ist.

(1) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 = 2 \end{cases}$$

(3) $$\begin{cases} -2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -6x_1 - x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -1 \end{cases}$$

Lösung. Wir bezeichnen mit A die Koeffizientenmatrix, mit (A, b) die erweiterte Koeffizientenmatrix des jeweiligen Systems. Beispielsweise ist im Fall (3)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ -6 & -1 & -4 & -4 \end{pmatrix}, \quad (A, b) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & -2 & -2 \\ -6 & -1 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nun werden (z.B. mit dem gaußschen Algorithmus oder einer phantasievollen Methode) $\mathrm{rang}(A)$ und $\mathrm{rang}(A, b)$ bestimmt. Lösbarkeit ist äquivalent zur Bedingung $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A, b)$. Wir erhalten in den angegebenen Fällen:

(1) $\mathrm{rang}(A) = 2$, $\mathrm{rang}(A, b) = 2$; das System ist lösbar.

(2) $\mathrm{rang}(A) = 2$, $\mathrm{rang}(A, b) = 3$; das System ist unlösbar.

(3) $\mathrm{rang}(A) = 2$, $\mathrm{rang}(A, b) = 3$; das System ist unlösbar.

Aufgabe 2/3/100 (S: Varianten)
Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems über $\mathbb{F}_5$

Index: Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems, Rang einer Matrix, Satz von Kronecker-Capelli

Stoffeinheiten: 2/3/1 - 2/3/5 Der Rang einer Matrix

Entscheiden Sie mit Hilfe des Satzes von Kronecker-Capelli, welches der folgenden Gleichungssysteme über den Körper $\mathbb{F}_5$ lösbar ist und geben Sie in diesem Fall die Anzahl der Lösungen an.

$$(1)\qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 \\ \quad -2x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(3)\qquad \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

Lösung. Wir bezeichnen mit A die Koeffizientenmatrix, mit (A, b) die erweiterte Koeffizientenmatrix des jeweiligen Systems; Lösbarkeit ist äquivalent zur Bedingung $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A, b)$. Tritt nach Ausführung des gaußschen Algorithmus in einem lösbaren System kein Parameter auf, so existiert genau eine Lösung; bei einem Parameter t sind dies (entsprechend der Zahl der möglichen Werte $t \in \mathbb{F}_5$) genau 5 Werte.

Wir erhalten in den angegebenen Fällen:

(1) $\mathrm{rang}(A) = 2$, $\mathrm{rang}(A, b) = 2$; das System ist lösbar (5 Lösungen).

(2) $\mathrm{rang}(A) = 3$, $\mathrm{rang}(A, b) = 3$; das System ist lösbar (1 Lösung).

(3) $\mathrm{rang}(A) = 2$, $\mathrm{rang}(A, b) = 3$; das System ist unlösbar.

Anmerkung. Tatsächlich erhalten wir bei konsequenter Ausführung des gaußschen Algorithmus allgemein genau 5^m Lösungen, falls m die Zahl der dabei auftretenden Parameter bezeichnet.

Aufgabe 2/3/110 (S: Varianten)

Beispiele für inverse Matrizen (1)

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen invertierbar ist und geben Sie in diesem Fall die Inverse an.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -6 & -8 & -8 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Lösung. Wir erhalten die inverse Matrix, indem wir beispielsweise im ersten Fall (A, E_2) durch Zeilentransformationen äquivalent in eine Matrix (E_2, A') umformen; dies ist genau dann möglich, wenn A invertierbar ist und es gilt dann $A' = A^{-1}$. So ergibt sich im ersten Fall

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -9 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Daher ist A invertierbar und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$.

Entsprechend (wenn auch mit etwas mehr Mühe) erhalten wir wir in den weiteren Fällen:

B ist nicht invertierbar (auch erkennbar aus $\mathrm{rang}(B) < 3$),

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$D(\lambda)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda \neq \pm 1$; dann gilt

$$D(\lambda)^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - 1} \begin{pmatrix} -1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/120 (S: Varianten)
Beispiele für inverse Matrizen (2)

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Zeigen Sie, dass die folgende Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ invertierbar ist und bestimmen Sie ihre inverse Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ergebnis. Die Matrix (A, E_4) lässt sich durch Zeilentransformationen in eine äquivalente Matrix (E_4, A') überführen. Daher ist A invertierbar und $A^{-1} = A'$; es ergibt sich

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -10 & 3 & 11 & 13 \\ -6 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/130 (S: Varianten)
Beispiele für inverse Matrizen über $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{C}$

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Für die nachfolgend angegebenen Matrizen sind die Inversen zu bestimmen;

(1) $$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 9 & -7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_3),$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} i & -(i+1) \\ -i & (i+2) \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C}).$$

Ergebnis. Unter (1) erhalten wir aus der Matrix A durch Reduktion mod(3) eine Matrix

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir formen $(\overline{A}, \mathrm{E}_3)$ zeilenäquivalent in die Matrix (E_3, A^{-1}) um und erhalten dabei

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Im Fall (2) ergibt sich entsprechend

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -(2i-1) & -(i-1) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/131 (S: Varianten)

Bestimmung inverser Matrizen über $\mathbb{F}_{29}$

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix, gaußscher Algorithmus, reguläre Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -10 & 3 \end{pmatrix}$$

über dem endlichen Primkörper $\mathbb{F}_{29}$.

Lösung. Wir erhalten die inverse Matrix, indem wir beispielsweise (A, E_2) durch Zeilentransformationen äquivalent in eine Matrix (E_2, A') umformen. Ist dies möglich, so gilt $A' = A^{-1}$. Dabei werden wir unter Vermeidung von Divisionen zunächst eine Matrix (D, A'') erzeugen, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Ausgehend von

$$\begin{pmatrix} 2 & -14 & 1 & 0 \\ -10 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich schrittweise

$$\begin{pmatrix} 2 & -14 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 10 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & -1 \\ 0 & 11 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit D^{-1} führt nun auf die Lösung. Dazu müssen wir die Zahlen 2 und 11 in $\mathbb{F}_{29}$ invertieren. Wegen $15 \cdot 2 = 30 = 1$ ist $-14 = 2^{-1}$. Um 11 zu invertieren, wird der euklidische Algorithmus (vgl. 1/2/26) mit den Zahlen 29 und 11 im Ring $\mathbb{Z}$ ausgeführt, wobei der größte gemeinsame Teiler (d.h. die Zahl 1) als Vielfachensumme der Ausgangszahlen dargestellt wird. Wir setzen $r_{-1} := f$ und $r_0 =: g$. Für $i > 0$ wird mit r_i der Rest bei der i-ten Division bezeichnet. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

$29 : 11 = 2$ Rest 7	$r_{-1} - 2 \cdot r_0 = r_1$	$r_1 = f - 2g$
$11 : 7 = 1$ Rest 4	$r_0 - 1 \cdot r_1 = r_2$	$r_2 = -f + 3g$
$7 : 4 = 1$ Rest 3	$r_1 - 1 \cdot r_2 = r_3$	$r_3 = 2f - 5g$
$4 : 3 = 1$ Rest 1	$r_2 - 1 \cdot r_3 = r_4$	$r_4 = -3f + 8g$

Die erste Spalte enthält den euklidischen Algorithmus. In der zweiten Spalte sind die Regeln zur Bildung der letzten Spalte angegeben. Diese entsteht durch Einsetzen der bereits bekannten Ausdrücke und enthält die Darstellung der Reste als Vielfachensummen. So ergibt sich

$$1 = -3f + 8g.$$

In $\mathbb{F}_{29}$ folgt (vgl. 1/2/29)

$$8 = 11^{-1}.$$

Multiplikation der zuletzt erhaltenen Matrix mit D^{-1} ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -7 & -13 \end{pmatrix},$$

daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 14 \\ -7 & -13 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/132 (S: Varianten)

Inverse Matrizen über Primkörpern (1)

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix, gaußscher Algorithmus, reguläre Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 16 & 29 \end{pmatrix}$$

über dem endlichen Primkörper $\mathbb{F}_{97}$.

Lösung. Wir erhalten die inverse Matrix, indem wir beispielsweise (A, E_2) durch Zeilentransformationen äquivalent in eine Matrix (E_2, A') umformen. Ist dies möglich, so gilt $A' = A^{-1}$. Dabei werden wir unter Vermeidung von Divisionen zunächst eine Matrix (D, A'') erzeugen, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Ausgehend von

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 16 & 29 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich schrittweise

$$\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -16 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 0 & -39 & -18 \\ 0 & 11 & -16 & 2 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation mit D^{-1} führt nun auf die Lösung. Dazu müssen wir die Zahlen 2 und 11 in $\mathbb{F}_{97}$ invertieren. Wegen $49 \cdot 2 = 98 = 1$ ist $-48 = 2^{-1}$. Um 11 zu invertieren, wird der euklidische Algorithmus (vgl. 1/2/26) mit den Zahlen 97 und 11 im Ring $\mathbb{Z}$ ausgeführt, wobei der größte gemeinsame Teiler (d.h. die Zahl 1) als Vielfachensumme der Ausgangszahlen dargestellt wird. Wir setzen $r_{-1} := f$ und $r_0 =: g$. Für $i > 0$ wird mit r_i der Rest bei der i-ten Division bezeichnet. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

$97 : 11 = 8$ Rest 9	$r_{-1} - 8 \cdot r_0 = r_1$	$r_1 = f - 8g$
$11 : 9 = 1$ Rest 2	$r_0 - 1 \cdot r_1 = r_2$	$r_2 = -f + 9g$
$9 : 2 = 4$ Rest 1	$r_1 - 4 \cdot r_2 = r_3$	$r_3 = 5f - 44g$

Die erste Spalte enthält den euklidischen Algorithmus. In der zweiten Spalte sind die Regeln zur Bildung der letzten Spalte angegeben. Diese entsteht durch Einsetzen der bereits bekannten Ausdrücke und enthält die Darstellung der Reste als Vielfachensummen. So ergibt sich

$$1 = 5f - 44g.$$

In $\mathbb{F}_{97}$ ergibt sich (vgl. 1/2/29)

$$-44 = 11^{-1}.$$

Multiplikation der zuletzt gefundenen Matrix mit D^{-1} ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 29 & -9 \\ 0 & 1 & 25 & 9 \end{pmatrix},$$

daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 29 & -9 \\ 25 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/133 (S: Varianten)

Inverse Matrizen über Primkörpern (2)

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix, gaußscher Algorithmus, reguläre Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Invertieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

über dem endlichen Primkörper $\mathbb{F}_5$.

Lösung. Wir erhalten die inverse Matrix, indem wir beispielsweise (A, E_3) durch Zeilentransformationen äquivalent in eine Matrix (E_3, A') umformen. Ist dies möglich, so ist A invertierbar und es gilt $A^{-1} = A'$. Dabei werden wir unter Vermeidung von Divisionen zunächst eine Matrix (D, A'') erzeugen, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Ausgehend von

$$(A, \mathrm{E}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich zunächst mit dem gaußschen Algorithmus

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir (mit der letzten Spalte beginnend) Nullen oberhalb der Einträge mit Index (i, i) durch die Umformungen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation von links mit

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ergibt} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/140 (S: Varianten)
Inverse Matrizen, Beispiele mit 3 Parametern

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Bestimmen Sie jeweils die inverse Matrix, sofern diese existiert.

(1) $$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R}),$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R}) \text{ für } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Ergebnis.

(1) $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R}).$$

(2) Für $a \cdot b \cdot c = 0$ ist die Matrix B nicht invertierbar. Anderenfalls erhalten wir

$$B^{-1} = \frac{1}{abc} \cdot \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ -b & 0 & ab \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/150 (S: Varianten)
Inverse Matrizen, Beispiele mit einem Parameter

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Für welche Zahlen $a \in \mathbb{R}$ existiert die Inverse der folgenden Matrix A? Geben Sie in diesem Fall A^{-1} an.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -(a-2) & 0 \\ 6 & -(a-2) & -2 \\ -6 & (3a-6) & -4 \end{pmatrix}$$

Ergebnis. A ist zeilenäquivalent zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -(a-2) & 0 \\ 0 & (a-2) & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt für $a = 2$, dass A nicht invertierbar ist. Im Fall $a \neq 2$ ergibt sich

$$A^{-1} = \frac{1}{(-6a+12)} \begin{pmatrix} (10a-20) & -(4a-8) & (2a-4) \\ 36 & -12 & 6 \\ (12a-24) & -(3a-6) & (3a-6) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2/3/160 (S: Varianten)

Eigenschaften und Beispiele invertierbarer Matrizen

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Wir untersuchen Eigenschaften von Matrizen:

(1) Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in M(n;K)$, in der eine Zeile oder eine Spalte nur aus Nullen besteht, nicht invertierbar sein kann.

(2) Geben Sie ein Beispiel einer nicht invertierbaren Matrix A an, in der keine Zeile und keine Spalte nur aus Nullen besteht.

(3) Für welche $t \in \mathbb{C}$ ist die folgende Matrix A invertierbar? Geben Sie in diesem Fall die Inverse von A an,

$$A = \begin{pmatrix} t & t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis. Wir geben das Resultat für (3) an.

1. Fall, $t = 0$: A ist nicht invertierbar.

2. Fall, $t \neq 0$: $A^{-1} = \frac{1}{t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & t & 1 \\ t & -t^2 & 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2/3/170

Bestimmung der Inversen spezieller invertierbarer Matrizen

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix, Diagonalmatrix, Permutationsmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

Zeigen Sie, dass die folgenden Matrizen invertierbar sind und berechnen Sie die Inversen.

(1) A sei die Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in K$ und $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \neq 0$.

(2) B sei die Permutationsmatrix

$$B = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}.$$

Verallgemeinern Sie überdies das Resultat von (2) auf beliebige Permutationsmatrizen.

Aufgabe 2/3/180
Inverse Matrizen, Beispiele mit 3 Parametern

Index: invertierbare Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/6 - 2/3/9 Die allgemeine lineare Gruppe

K sei ein Körper. Bestimmen Sie die Inversen der folgenden Matrizen

(1) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;K)$,

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;K)$, $(\,a, c \neq 0\,)$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;K)$.

Hinweis. Die oberen Dreiecksmatrizen mit von Null verschiedenen Elementen auf der Hauptdiagonale bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n;K)$.

Aufgabe 2/3/190 (S: Varianten)
Hill-Ciphern (1)

Index: Hill-Ciphern, Matrizenmultiplikation, reguläre Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/10 Beispiel: Hill - Ciphern

Eine Nachricht wird in der folgenden Weise verschlüsselt, indem zunächst Buchstaben auf Elemente des Primkörpers $\mathbb{F}_{29}$ abgebildet werden.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-	,	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Die entstandenen Ziffern werden als Folge von Zahlenpaaren angeordnet (wobei ggf. am Ende der Nachricht ein Leerzeichen einzufügen ist, damit eine gerade Anzahl von Buchstaben entsteht). Nun bezeichne A eine reguläre Matrix aus $\mathrm{M}(2;\mathbb{F}_{29})$; die zugehörige Abbildung $\mathbb{F}_{29}^2 \to \mathbb{F}_{29}^2$ bildet die Paare der Folge auf neue Paare ab.

Als verschlüsselte Nachricht bezeichnen wir denjenigen Text, der der Folge der Bilder der Zahlenpaare entspricht.

Verschlüsseln Sie die Nachricht „MITTWOCH-EMIL“ unter Verwendung der Matrix $A = \begin{pmatrix} -11 & -14 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$.

Lösung. Zunächst stellen wir die Zuordnung der Buchstaben zu den Elementen von $\mathbb{F}_{29}$ her und erhalten die folgende Liste von Paaren

$$(12,8),(19,19),(22,14),(2,7),(26,4),(12,8),(11,28).$$

Durch Multiplikation der Transponierten der Paare p mit der Matrix A, d.h. durch ${}^{\mathrm{t}}p \mapsto A \cdot {}^{\mathrm{t}}p$ erhalten wir die gesuchten Bilder, das erste entsteht beispielsweise durch

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

Die Resultate werden wiederum als Liste von Paaren aus $\mathbb{F}_{29}^2$ angeordnet; es ergibt sich

$$(17,18),(18,5),(26,8),(25,27),(6,3),(17,18),(9,23).$$

Wir stellen gemäß der Tabelle die Zuordnung zu den Buchstaben her und erhalten die verschlüsselte Nachricht

„RSSF-IZ,GDRSJX“.

Aufgabe 2/3/200 (S: Varianten)
Hill-Ciphern (2)

Index: Hill-Ciphern, Matrizenmultiplikation, reguläre Matrix, inverse Matrix

Stoffeinheiten: 2/3/10 Beispiel: Hill - Ciphern

Eine Nachricht wird in der folgenden Weise verschlüsselt, indem zunächst Buchstaben auf Elemente des Primkörpers $\mathbb{F}_{29}$ abgebildet werden.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-	,	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Die entstandenen Ziffern werden als Folge von Zahlenpaaren angeordnet (wobei ggf. am Ende der Nachricht ein Leerzeichen einzufügen ist, damit eine gerade Anzahl von Buchstaben entsteht). Nun bezeichne A eine reguläre Matrix aus $\mathrm{M}(2;\mathbb{F}_{29})$; die zugehörige Abbildung $\mathbb{F}_{29}^2 \to \mathbb{F}_{29}^2$ bildet die Paare der Folge auf neue Paare ab.

Als verschlüsselte Nachricht bezeichnen wir denjenigen Text, der der Folge der Bilder der Zahlenpaare entspricht.

Eine Nachricht wurde unter Verwendung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$ verschlüsselt und lautet jetzt „DLYL IMGOREY“. Finden Sie die Nachricht.

Lösung. Zunächst stellen wir die Zuordnung der Buchstaben zu den Elementen von $\mathbb{F}_{29}$ her und erhalten die folgende Liste von Paaren

$$(3,11),(24,11),(28,8),(12,6),(14,17),(4,24).$$

Durch Multiplikation der Transponierten der Paare p mit der Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 9 & -10 \end{pmatrix},$$

d.h. durch ${}^{t}p \mapsto A^{-1} \cdot {}^{t}p$ erhalten wir die gesuchten Urbilder, das erste entsteht beispielsweise durch

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} \mapsto A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Resultate werden wiederum als Liste von Paaren aus $\mathbb{F}_{29}^2$ angeordnet; es ergibt sich

$$(7,4), (20,19), (4,27), (14,19), (19,14), (26,28).$$

Wir stellen gemäß der Tabelle die Zuordnung zu den Buchstaben her und erhalten die unverschlüsselte Nachricht

„HEUTE,OTTO- “.

Aufgabe 2/3/240 (S: Varianten)

Gauß-Bruhat-Zerlegung einer Matrix aus $\mathrm{M}(3;\mathbb{R})$

Index: Gauß-Bruhat-Zerlegung, Permutationsmatrix, Dreiecksmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/16 - 2/3/18 LR-Zerlegung und Gauß-Bruhat-Zerlegung

(1) Finden Sie die Gauß-Bruhat Zerlegung der Matrix A, d. h. bestimmen Sie eine Permutationsmatrix P und eine obere Dreiecksmatrix Q mit Einsen auf der Hauptdiagonale, so dass $A = Q \cdot P \cdot A'$ gilt mit einer oberen Dreiecksmatrix A'. Dabei ist

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestimmen Sie die entsprechende Zerlegung für

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{R}) \quad \text{mit } ad \neq bc \text{ und } c \neq 0.$$

Ergebnis. Wir geben die Zerlegung im Fall (1) an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{23}{2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2/3/250 (S: Varianten)

LR-Zerlegung einer Matrix aus $\mathrm{M}(3;\mathbb{R})$

Index: LR-Zerlegung, Permutationsmatrix, Dreiecksmatrix

Stoffeinheiten: 2/3/16 - 2/3/18 LR-Zerlegung und Gauß-Bruhat-Zerlegung

Finden Sie die LR-Zerlegung für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis. A ergibt sich als das folgende Produkt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2/4/005 (S: Varianten)
Division mit Rest für Polynome (1)

Index: Division mit Rest

Stoffeinheiten: 2/4/1 - 2/4/4 Der euklidische Algorithmus

Gegeben sind die Polynome

$$f = -18X^3 + 3X^2 - 7 \quad \text{und} \quad g = -6X^2 + 3X - 1$$

in $\mathbb{R}[X]$. Dividieren Sie f durch g mit Rest, d.h. ermitteln Sie Polynome q und r, die den Bedingungen

$$f = g \cdot q + r, \quad \deg(g) > \deg(r).$$

genügen.

Lösung. Wir schreiben den Lösungsweg in üblicher Weise auf:

$$\begin{array}{rl}
(-18X^3 + 3X^2 - 7) \ : \ (-6X^2 + 3X - 1) = 3X + 1 \ \text{ Rest } \ -6 & \\
-18X^3 + 9X^2 - 3X & |- \\
\hline
-6X^2 + 3X - 7 & \\
-6X^2 + 3X - 1 & |- \\
\hline
-6 &
\end{array}$$

Aufgabe 2/4/006 (S: Varianten)
Division mit Rest, ausführliche Darstellung (2)

Index: Division mit Rest

Stoffeinheiten: 2/4/1 - 2/4/4 Der euklidische Algorithmus

Gegeben sind die Polynome

$$f = -72X^3 - 109X^2 + 14 \quad \text{und} \quad g = -9X^2 - 8X + 1$$

in $\mathbb{R}[X]$. Dividieren Sie f durch g mit Rest, d.h. ermitteln Sie Polynome q und r, die den Bedingungen

$$f = g \cdot q + r, \quad \deg(g) > \deg(r).$$

genügen.

Lösung. So wie wir in der Schule die Division mit Rest gelernt haben, schreiben wir unseren Lösungsweg in üblicher Weise auf:

$$\begin{array}{rl}
(-72X^3 - 109X^2 + 14) \ : \ (-9X^2 - 8X + 1) = 8X + 5 \ \text{ Rest } \ 32X + 9 & \\
-72X^3 - 64X^2 + 8X & |- \\
\hline
-45X^2 - 8X + 14 & \\
-45X^2 - 40X + 5 & |- \\
\hline
32X + 9 &
\end{array}$$

Wer das verstanden hat, ist eigentlich fertig.

Nun soll ausführlich erläutert werden, was mit der obigen Schreibweise gemeint ist; wir geben eine exakte Beschreibung des Algorithmus und üben gleichzeitig den Umgang mit den Begriffen „Leitterm“ und „S-Polynom“ (vgl. 2/4/1). Tatsächlich ist es möglich, das Verfahren in einem wohlverstandenen Sinn sogar auf Polynome mehrerer Variabler zu übertragen (vgl. 2/5/14).

$\mathrm{LT}(p)$ bezeichnet (wie immer) den Leitterm eines Polynoms p. Im Polynomring einer Unbestimmten können mit seiner Hilfe für Polynome f und g mit $\deg(f) \geq \deg(g)$ der Leittermquotient

$$\mathrm{LQ}(f,g) := \frac{\mathrm{LT}(f)}{\mathrm{LT}(g)}$$

sowie das S-Polynom

$$\mathrm{S}(f,g) = f - \mathrm{LQ}(f,g)\cdot g$$

gebildet werden. Im Fall $\deg(f) > 0$ hat das S-Polynom die Eigenschaft $\deg(\mathrm{S}(f,g)) < \deg(f)$. Die Division mit Rest ist damit das folgende Verfahren:

$r := f,\ q := 0,$

Berechne {

$q := q + \mathrm{LQ}(r,g),$

$r := \mathrm{S}(r,g),$

} **solange** $(\deg(r) \geq \deg(g))$.

Für die Polynome unserer Aufgabe stellen wir dies in einer Tabelle zusammen:

r	q	$\mathrm{LQ}(r,g)$	$\mathrm{LQ}(r,g)\cdot g$
$-72X^3 - 109X^2 + 14$	$8X$	$8X$	$-72X^3 - 64X^2 + 8X$
$-45X^2 - 8X + 14$	$8X + 5$	5	$-45X^2 - 40X + 5$
$32X + 9$			

Das Ergebnis ist

$$r = 32X + 9,\ q = 8X + 5,$$

d.h. es gilt (wie eingangs behauptet)

$$(-72X^3 - 109X^2 + 14) : (-9X^2 - 8X + 1) = 8X + 5 \ \text{ Rest } 32X + 9.$$

Aufgabe 2/4/007 (S: Varianten)

Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von Polynomen (1)

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, euklidischer Algorithmus

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Gegeben sind die Polynome

$$f = -18X^4 - 27X^3 + 11X^2 + 39X + 21 \quad \text{und}$$
$$g = 18X^3 + 45X^2 + 40X + 14$$

in $\mathbb{R}[X]$. Ermitteln Sie ihren größten gemeinsamen Teiler.

Lösung. $\mathrm{LT}(p)$ bezeichnet (wie immer) den Leitterm eines Polynoms p. Im Polynomring einer Unbestimmten kann mit seiner Hilfe für Polynome f und g mit $\deg(f) \geq \deg(g)$ der Leittermquotient

$$\mathrm{LQ}(f,g) := \frac{\mathrm{LT}(f)}{\mathrm{LT}(g)}$$

sowie das S-Polynom

$$\mathrm{S}(f,g) = f - \mathrm{LQ}(f,g) \cdot g$$

gebildet werden (vgl. 2/4/1). Im Fall $\deg(f) > 0$ hat das S-Polynom die Eigenschaft $\deg(\mathrm{S}(f,g)) < \deg(f)$.

Damit kann der euklidische Algorithmus für Polynome in der folgenden Weise formuliert werden:

$r_1 := f$, $r_2 := g$,
Berechne {
  $r_1 := \mathrm{S}(r_1, r_2)$,
  falls($\deg(r_1) < \deg(r_2)$) vertausche r_1 und r_2,
} **solange** ($r_2 \neq 0$).

Das letzte Polynom r_2, mit dem reduziert wurde, ist ein größter gemeinsamer Teiler der Ausgangspolynome f und g.

Für die Polynome unserer Aufgabe stellen wir dies in einer Tabelle zusammen:

r_1	$\mathrm{LQ}(r_1, r_2) \cdot r_2$
$-18X^4 - 27X^3 + 11X^2 + 39X + 21$ $18X^3 + 51X^2 + 53X + 21$ $6X^2 + 13X + 7$	$-X \cdot (18X^3 + 45X^2 + 40X + 14)$ $1 \cdot (18X^3 + 45X^2 + 40X + 14)$
$18X^3 + 45X^2 + 40X + 14$ $6X^2 + 19X + 14$ $6X + 7$	$3X \cdot (6X^2 + 13X + 7)$ $1 \cdot (6X^2 + 13X + 7)$
$6X^2 + 13X + 7$ $6X + 7$ 0	$X \cdot (6X + 7)$ $1 \cdot (6X + 7)$

Daher ist das assoziierte normierte Polynom $\mathrm{ggT}(f,g) = X + \dfrac{7}{6}$ der gesuchte größte gemeinsame Teiler.

Aufgabe 2/4/010 (S: Varianten)
Division mit Rest für Polynome (3)

Index: Division mit Rest

Stoffeinheiten: 2/4/1 - 2/4/4 Der euklidische Algorithmus

Führen Sie in den angegebenen Polynomringen die Division mit Rest für die folgenden Paare (f, g) von Polynomen aus.

(1) $f = -3X^6 + X^2 - 2X + 1\,,\quad g = X^4 + 2X^2 - X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$,
(2) $f = \sqrt{2}X^4 + (1+\sqrt{6})X^3 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2})X^2 - X - \sqrt{3}$,
$g = X^2 + \sqrt{3}X - 2 \in \mathbb{R}[X]$,
(3) $f = -X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X\,,\quad g = -X^3 + X^2 - X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$.

Ergebnis. Wir erhalten $f = qg + r$ mit Polynomen q und r:
(1) $q = -3X^2 + 6\,,\quad r = -3X^3 - 14X^2 + 4X + 7$,
(2) $q = \sqrt{2}X^2 + X,\ r = X - \sqrt{3}$,
(3) $q = X^2\,,\quad r = -X$.

Aufgabe 2/4/020 (S: Varianten)
Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von Polynomen (2)
Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, euklidischer Algorithmus
Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler der Polynome

$$f = X^4 + 5X^3 + 5X^2 + 5X + 4,$$
$$g = X^6 + 12X^5 + 19X^4 - 5X^3 + 48X^2 - 17X + 30$$

aus $K[X]$, falls K einer der folgenden Körper ist:
(1) $K = \mathbb{R}$,
(2) $K = \mathbb{F}_3$,
(3) $K = \mathbb{F}_2$.

Ergebnis. Als größte gemeinsame Teiler erhalten wir
(1) $\mathrm{ggT}(f, g) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$,
(2) $\mathrm{ggT}(f, g) = X^4 - X^3 - X^2 - X + 1 \in \mathbb{F}_3[X]$,
(3) $\mathrm{ggT}(f, g) = X^4 + X^3 + X^2 + X \in \mathbb{F}_2[X]$.

Aufgabe 2/4/030 (S: Varianten)
Der größte gemeinsame Teiler in Abhängigkeit von Parametern
Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision
Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Für welche Zahlen $t \in \mathbb{R}$ besitzen die Polynome

$$f = 4X^4 + (2t + 2)X^3 - (6t + 8)X^2 + (4t - 1)X + 1,$$
$$g = -2X^3 - (t + 3)X^2 + (2t + 1)X + 2$$

aus dem Ring $\mathbb{R}[X]$ einen nichttrivialen gemeinsamen Teiler?

Lösung. Wir führen den euklidischen Algorithmus für f und g aus; als erste Reste ergeben sich

$$r_1 = X - 3 \quad \text{und} \quad r_2 = -(3t + 76).$$

$r_2(t) = 0$ ist hier (wegen $\deg_X(r_2(t)) \le 0$) notwendig und hinreichend dafür, dass r_1 größter gemeinsamer Teiler der Polynome f und g ist, anderenfalls gilt $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Die Bedingung für die Existenz eines nichttrivialen gemeinsamen Teilers lautet daher $3t+76 = 0$.

Aufgabe 2/4/040 (S: Varianten)
Nullstellenbestimmung mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Es seien $f_1, f_2, \ldots, f_n \in K[X]$ Polynome und $d \in K[X]$ ihr größter gemeinsamer Teiler. Beweisen Sie, dass $\mathrm{V}(\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}) = \mathrm{V}(\{d\})$ ist und verwenden Sie diese Eigenschaft zur Berechnung der folgenden Nullstellenmengen.

(1) $\mathrm{V}(\{2X^6 + 5X^4 - 5X^3 + 4X^2 + X + 3, X^5 + 3X^3 + 5X + 6\}) \subseteq \mathbb{R}$,

(2) $\mathrm{V}(\{3X^4 - 4X^3 - 12X^2 - 8X - 3, 9X^5 - 15X^4 - 38X^3 + 2X^2 + 9X + 9, 9X^4 + 12X^3 - 2X^2 - 4X - 3\}) \subseteq \mathbb{C}$,

(3) $\mathrm{V}(\{X^6 + X^5 + 2X^4 + X^3 + X^2 + 2X, X^7 + X^5 + 2X^4 + X^3 - X\}) \subseteq \mathbb{F}_5$.

Hinweise zur Lösung.

(1) Als Nullstellenmenge ergibt sich $\mathrm{V}(\{X^2 + X + 3\})$ und aus den leicht zu bestimmenden Nullstellen des Polynoms das Resultat.

(2) Die Nullstellenmenge ist $\mathrm{V}(\{3X^3 - 7X^2 - 5X - 3, 9X^4 + 12X^3 - 2X^2 - 4X - 3\}) = \mathrm{V}(\{3X^2 + 2X + 1\})$; das zuletzt gefundene Polynom ist wiederum leicht zu faktorisieren.

(3) Die Nullstellenmenge ist $\mathrm{V}(\{2X^4 - X^3 + X^2 - X\}) = \{0, 4\}$.

Aufgabe 2/4/050 (S: Varianten)
Nullstellen rationaler Polynome

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, Division mit Rest, Kettendivision, Nullstellenmenge

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Wir bezeichnen mit $f = a_0X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$ ein Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$, das ganzzahlige Koeffizienten a_i hat. Es sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f. Angenommen $\alpha = \dfrac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $(a, b) = 1$.

(1) Zeigen Sie: $a \mid a_n$ und $b \mid a_0$.

(2) Benutzen Sie diese Eigenschaft zur Bestimmung aller Nullstellen des Polynoms $f = 15X^5 - 23X^4 - 26X^3 - 14X^2 + 84X - 16$ im Körper der komplexen Zahlen.

Hinweis zur Lösung.

Wir finden die rationalen Nullstellen 2, $\dfrac{1}{5}$ und $\dfrac{4}{3}$ für f und damit

$f = (3X-4)(X-2)(5X-1)(X^2+2X+2).$

Der letzte Faktor besitzt ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen, die leicht angegeben werden können.

Aufgabe 2/4/070 (S: Varianten)

Der größte gemeinsame Teiler als Vielfachensumme

Index: größter gemeinsamer Teiler für Polynome, euklidischer Algorithmus, Division mit Rest, Kettendivision

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Finden Sie für die folgenden Paare (f, g) reeller Polynome den größten gemeinsamen Teiler d, sowie Polynome u, v mit der Eigenschaft $d = fu + gv$.

(1) $f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1,\; g = X^3 + X^2 + 3X + 1,$

(2) $f = X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 7X - 6,\; g = X^5 + 5X^4 + 6X^3 + 3X^2 - X - 2.$

Ergebnis.

(1) $1 = f \cdot (\frac{5}{6}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{13}{6}) + g \cdot (-\frac{5}{6}X^2 - \frac{3}{2}X - \frac{7}{6}),$

(2) $3X^2 + 9X - 6 = f \cdot (-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + 1) + g \cdot (\frac{1}{2}X).$

Aufgabe 2/4/080 (S: Varianten)

Faktorzerlegung von Polynomen

Index: irreduzibles Polynom, Zerlegung in irreduzible Faktoren

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Bestimmen Sie die Zerlegung von $f = X^4 + 2X^3 - 7X^2 - 4X + 4$ in irreduzible Faktoren, wenn f als Polynom über dem jeweils angegebenen Körper K betrachtet wird.

(1) $K = \mathbb{Q}$,

(2) $K = \mathbb{R}$,

(3) $K = \mathbb{C}$,

(4) $K = \mathbb{F}_2$,

(5) $K = \mathbb{F}_3$.

Ergebnis.

(1) $f = (X^2 + 3X - 2) \cdot (X + 1) \cdot (X - 2).$

(2) Unter (1) ist noch $X^2 + 3X - 2$ in Linearfaktoren zu zerlegen.

(3) Die Zerlegung ist dieselbe wie unter (2).

(4) $f = (X + 1)^2 \cdot X^2.$

(5) $f = (X^2 + 1) \cdot (X + 1)^2.$

Aufgabe 2/4/090
Irreduzible Polynome über dem Primkörper $\mathbb{F}_2$

Index: irreduzibles Polynom

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Bestimmen Sie alle irreduzible Polynome vom Grad 2 bzw. 3 aus $\mathbb{F}_2[X]$. Wieviele irreduzible Polynome vom Grad 4 gibt es über $\mathbb{F}_2$?

Aufgabe 2/4/100 (S: Varianten)
Faktorzerlegung von Polynomen über $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$

Index: Zerlegung in irreduzible Faktoren, irreduzibles Polynom

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Wir betrachten die folgenden Polynome aus den Polynomringen über den angegebenen Körpern. Zerlegen Sie diese in irreduzible Faktoren.

(1) $3X^3 - X^2 - 2X + 3 \in \mathbb{Q}[X]$,
(2) $X^4 + X^3 + X^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$,
(3) $2X^5 - 7X^4 - 2X^3 - 6X^2 - 12X + 16 \in \mathbb{C}[X]$,
(4) $X^5 - 4X^3 - 5X^2 + 20 \in \mathbb{R}[X]$,
(5)* $X^{p-1} - 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ (p bezeichnet eine Primzahl).

Hinweise zur Lösung. Mit f bezeichnen wir das jeweilige Polynom.

(1) f ist unzerlegbar.
(2) $f = (X^3 + X + 1) \cdot (X + 1)$.
(3) $f = (X^2 + 2) \cdot (2X^2 + X - 2) \cdot (X - 4)$; die Zerlegung in Linearfaktoren ist nun offensichtlich.
(4) $f = (X^3 - 5) \cdot (X - 2) \cdot (X + 2)$; damit wird ersichtlich, wie weiter vorzugehen ist.
(5) $f = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot \ldots \cdot (X - (p - 1))$.

Aufgabe 2/4/105 (S: Varianten)
Irrationalität von Quadratwurzeln

Index: rationale Zahl, Teilbarkeit, Hauptsatz der Arithmetik

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Zeigen Sie: Die Zahl $35 \in \mathbb{N}$ besitzt keine rationale Wurzel.

Lösung. Wegen $25 < 35 < 36$ gilt $5 < \sqrt{35} < 6$, d.h. die Wurzel ist keine ganze Zahl. Angenommen, die Wurzel ist rational, so können Zähler und Nenner teilerfremd angenommen werden mit einem Nenner ungleich 1. Diese Eigenschaft bleibt für das Quadrat dieser Zahl erhalten, was aus der eindeutigen Zerlegung jeder ganzen Zahl in Primfaktoren folgt. Das ist ein Widerspruch, denn 35 ist ganz.

Aufgabe 2/4/110
Eisenstein-Kriterium

Index: irreduzibles Polynom

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Es seien $f = X^n + a_1X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $p \mid a_i$ für alle i,

(2) $p^2 \nmid a_n$.

Dann ist f irreduzibel als Polynom aus $\mathbb{Q}[X]$ (*Eisenstein-Kriterium*).

Aufgabe 2/4/120

Irreduzibilität von Polynomen in $\mathbb{Q}[X]$

Index: irreduzibles Polynom

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

p sei eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

Hinweis. Verwenden Sie das Eisenstein-Kriterium.

Aufgabe 2/4/130

Zerfällungskörper von $X^3 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$

Index: Zerfällungskörper

Stoffeinheiten: 2/4/15 - 2/4/21 Endliche algebraische Körpererweiterungen

Es sei $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (dann ist $\omega^3 = 1$ und $\omega^2 + \omega + 1 = 0$). Zeigen Sie, dass der Erweiterungskörper $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega] = (\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}])[\omega]$ von $\mathbb{Q}$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) Alle Nullstellen von $X^3 - 2$ liegen in $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega]$.

(2) $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega]$ ist der kleinste Erweiterungskörper mit der Eigenschaft (1), d.h. $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}, \omega]$ ist Zerfällungskörper von $X^3 - 2$.

Aufgabe 2/4/140

Konstruktion eines 9-elementigen Körpers

Index: irreduzibles Polynom, Nullstelle eines Polynoms

Stoffeinheiten: 2/4/5 - 2/4/14 Nullstellen und Faktorzerlegung

Zeigen Sie, dass das Polynom $p = X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist. Beschreiben Sie $\mathbb{F}_2[X]/(p(X))$ durch Angabe der Additions- und Multiplikationstabellen.

Aufgabe 2/4/150

Konstruktion endlicher Körper

Index: irreduzibles Polynom, Zerfällungskörper

Stoffeinheiten: 2/4/15 - 2/4/21 Endliche algebraische Körpererweiterungen

Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $f \in \mathbb{F}_p[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n. Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_p[X]/(f(X))$ ein Körper mit p^n Elementen ist. Geben Sie insbesondere ein Beispiel für einen Körper mit 9 Elementen an.

Aufgabe 2/5/010 (S: Varianten)
Matrixordnungen (1)

Index: Monomordnung, Matrixordnung

Stoffeinheiten: 2/5/8 - 2/5/16 Monomordnungen und Division mit Rest

Wir betrachten die Matrixordnungen $<_A$ und $<_B$ für Monome in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, die durch

(1) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -6 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

(2) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

gegeben sind. Welche dieser Matrixordnungen ist keine Monomordnung? Finden Sie in diesem Fall ein Monom kleiner als 1.

Lösung. Offensichtlich ist $<_B$ keine Monomordnung und $X_3 <_B 1$.
Im anderen Fall liegt eine Monomordnung vor, denn die Matrix A hat den Rang 3 und enthält als ersten (von 0 verschiedenen) Eintrag in jeder Spalte eine positive Zahl.

Aufgabe 2/5/020 (S: Varianten)
Matrixordnungen (2)

Index: Monomordnung, Matrixordnung

Stoffeinheiten: 2/5/8 - 2/5/16 Monomordnungen und Division mit Rest

Wir betrachten die Monomordnung $<_A$ für $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ordnen Sie die Menge

$$M = \{X_1^2, X_1X_2, X_1X_3, X_2^2, X_2X_3, X_3^2\}$$

bezüglich $<_A$.

Lösung. Offensichtlich ist A regulär und enthält insbesondere in der ersten Zeile nur positive Einträge; daher wird durch diese Matrix tatsächlich eine Monomordnung definiert. Für ein beliebiges Monom $q = X_1^{u_1}X_2^{u_2}X_3^{u_3}$ bilden wir $p = X_1^{v_1}X_2^{v_2}X_3^{v_3}$, wobei v_1, v_2, v_3 durch

$$(\, v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \,) = A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. f sei die Abbildung $q \mapsto p$ der Menge der Monome aus $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ in sich. Sie ist bijektiv, da A regulär ist. Wir bestimmen nun die lexikographische Ordnung der Menge $N := f(M)$,

$$N = \{X_1^2X_2^{10}X_3^2, X_1^4X_2^9X_3^2, X_1^6X_2^8X_3^2, X_1^5X_2^5X_3, X_1^7X_2^4X_3, X_1^8\}.$$

Das größte Monom in N ist X_1^8.
Das bedeutet, dass $X_3^2 = f^{-1}(X_1^8)$ das größte Monom von M bezüglich $<_A$ ist. Entsprechend erhalten wir die Anordnung aller Monome bezüglich $<_A$; es ergibt sich

$$X_3^2 > X_2X_3 > X_2^2 > X_1X_3 > X_1X_2 > X_1^2.$$

Aufgabe 2/5/030 (S: Varianten)
Matrixordnungen (3)

Index: Monomordnung, Matrixordnung

Stoffeinheiten: 2/5/8 - 2/5/16 Monomordnungen und Division mit Rest

Wir betrachten die Monomordnung $<_A$ für $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ordnen Sie die Menge

$$M = \{X_1^3X_2, X_1X_2X_3^2, X_1X_2^2X_3, X_1^2X_3, X_2X_3^3, X_1^2X_2X_3^2\}$$

bezüglich $<_A$.

Lösung. Offensichtlich ist A regulär und enthält insbesondere in der ersten Zeile nur positive Einträge; daher wird durch diese Matrix tatsächlich eine Monomordnung definiert. Für ein beliebiges Monom $q = X_1^{u_1}X_2^{u_2}X_3^{u_3}$ bilden wir $p = X_1^{v_1}X_2^{v_2}X_3^{v_3}$, wobei v_1, v_2, v_3 durch

$$(\, v_1 \;\, v_2 \;\, v_3 \,) = A\cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. f sei die Abbildung $q \mapsto p$ der Menge der Monome aus $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ in sich. Sie ist bijektiv, da A regulär ist. Wir bestimmen nun die lexikographische Ordnung der Menge $N := f(M)$,

$$N = \{X_1^9X_2^4X_3^3, X_1^9X_2^6X_3^7, X_1^{10}X_2^5X_3^4, X_1^6X_2^4X_3^5, X_1^9X_2^7X_3^9, X_1^{11}X_2^7X_3^8\}.$$

Das größte Monom in N ist $X_1^{11}X_2^7X_3^8$.
Das bedeutet, dass $X_1^2X_2X_3^2 = f^{-1}(X_1^{11}X_2^7X_3^8)$ das größte Monom von M bezüglich $<_A$ ist. Entsprechend erhalten wir die Anordnung aller Monome bezüglich $<_A$; es ergibt sich

$$X_1^2X_2X_3^2 > X_1X_2^2X_3 > X_2X_3^3 > X_1X_2X_3^2 > X_1^3X_2 > X_1^2X_3.$$

Aufgabe 2/5/040 (S: Varianten)
Gröbnerbasen (1)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g,

$$f = X_1^2 + X_2^{16}X_3^4, \quad g = X_1X_2 + X_2^5X_3^{11}$$

erzeugt wird.

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$\mathrm{S}(f,g) = X_2\cdot f - X_1\cdot g = -X_1X_2^5X_3^{11} + X_2^{17}X_3^4.$$

Nun ergibt sich der Rest von $\mathrm{S}(f,g)$ bei Division durch (f,g) als

$$q := X_2^{17}X_3^4 + X_2^9X_3^{22}.$$

$\mathrm{S}(f,q)$ ist bezüglich (f,q) speziell erzeugbar (vgl. Lemma 2/5/27).
Wir berechnen $\mathrm{S}(g,q)$ wie oben und sehen, dass bei Division durch (g,q) der Rest 0 auftritt, denn

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(g,q) &= X_2^{16}X_3^4\cdot g - X_1\cdot q = -X_1X_2^9X_3^{22} + X_2^{21}X_3^{15}\\ &= -X_2^8X_3^{22}\cdot g + X_2^4X_3^{11}\cdot q.\end{aligned}$$

Dann ist

$$(f,g,q) = (X_1^2 + X_2^{16}X_3^4, X_1X_2 + X_2^5X_3^{11}, X_2^{17}X_3^4 + X_2^9X_3^{22})$$

eine Gröbnerbasis des von f,g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

Aufgabe 2/5/050 (S: Varianten)
Gröbnerbasen (2)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,

$$f = X_1X_2 + X_2^3X_3^5,\quad g = X_1X_3^9 + X_2X_3^3.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$\mathrm{S}(f,g) = X_3^9\cdot f - X_2\cdot g = X_2^3X_3^{14} - X_2^2X_3^3.$$

Wir setzen $q := X_2^3X_3^{14} - X_2^2X_3^3$ und berechnen $\mathrm{S}(g,q)$ wie oben; es zeigt sich, dass in beiden Fällen bei Division durch (f,g,q) der Rest 0 auftritt, denn

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(f,q) &= X_2^2X_3^{14}\cdot f - X_1\cdot q = X_1X_2^2X_3^3 + X_2^5X_3^{19}\\ &= X_2X_3^3\cdot f + X_2^5X_3^{19} - X_2^4X_3^8 = X_2X_3^3\cdot f + X_2^2X_3^5\cdot q\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(g,q) &= X_2^3X_3^5\cdot g - X_1\cdot q = X_1X_2^2X_3^3 + X_2^4X_3^8\\ &= X_2X_3^3\cdot f + X_2^4X_3^8 - X_2^4X_3^8 = X_2X_3^3\cdot f.\end{aligned}$$

Dann ist

$$(f,g,q) = (X_1X_2 + X_2^3X_3^5, X_1X_3^9 + X_2X_3^3, X_2^3X_3^{14} - X_2^2X_3^3)$$

eine Gröbnerbasis des von f,g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

Aufgabe 2/5/060 (S: Varianten)
Gröbnerbasen (3)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,

$$f = X_1^2, \quad g = X_1X_2^8 + X_2^2X_3^{12}.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$\mathrm{S}(f,g) = X_2^8 \cdot f - X_1 \cdot g = -X_1X_2^2X_3^{12}.$$

Wir setzen $h := X_1X_2^2X_3^{12}$ und sehen, dass $\mathrm{S}(f,h) = 0$ ist, weil f, h Monome sind. Es ist

$$\mathrm{S}(g,h) = X_3^{12} \cdot g - X_2^6 \cdot h = X_2^2X_3^{24}.$$

Mit $q := X_2^2X_3^{24}$ ergibt sich $\mathrm{S}(f,q) = \mathrm{S}(h,q) = 0$ da f, h, q Monome sind. Wir berechnen $\mathrm{S}(g,q)$ wie oben und sehen, dass bei Division durch (g,q) der Rest 0 auftritt, denn

$$\mathrm{S}(g,q) = X_3^{24} \cdot g - X_1X_2^6 \cdot q = X_3^{12} \cdot q.$$

Dann ist

$$(f,g,h,q) = (X_1^2, X_1X_2^8 + X_2^2X_3^{12}, X_1X_2^2X_3^{12}, X_2^2X_3^{24})$$

eine Gröbnerbasis des von f, g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

Aufgabe 2/5/070 (S: Varianten)
Gröbnerbasen (4)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,

$$f = X_1^2 + X_3^{16}, \quad g = X_1X_2 + X_3^8.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$\mathrm{S}(f,g) = X_2 \cdot f - X_1 \cdot g = -X_1X_3^8 + X_2X_3^{16}.$$

Wir setzen $h := X_1X_3^8 - X_2X_3^{16}$ und sehen, dass

$$\mathrm{S}(f,h) = X_3^8 \cdot f - X_1 \cdot h = X_3^{16} \cdot g$$

und

$$\mathrm{S}(g,h) = X_3^8 \cdot g - X_2 \cdot h = X_2^2X_3^{16} + X_3^{16}$$

ist. Wir setzen $q = X_2^2X_3^{16} + X_3^{16}$ und bemerken, dass $\mathrm{S}(f,q)$ bezüglich (f,q) speziell erzeugbar ist (vgl. Lemma 2/5/27).

Wir berechnen $\mathrm{S}(g,q)$ wie oben und sehen, dass der Rest bei Division durch (g,q) gleich 0 ist,

$$\mathrm{S}(g,q) = X_2X_3^{16} \cdot g - X_1 \cdot q = -X_3^8 \cdot h.$$

Offensichtlich haben wir

$$\mathrm{S}(h,q) = X_2^2X_3^8 \cdot h - X_1 \cdot q = -X_3^8 \cdot h - X_2X_3^8 \cdot q.$$

Daher ist
$$(f,g,h,q) = (X_1^2 + X_3^{16}, X_1X_2 + X_3^8, X_1X_3^8 - X_2X_3^{16}, X_2^2X_3^{16} + X_3^{16})$$
eine Gröbnerbasis des von f, g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

Aufgabe 2/5/080 (S: Varianten)

Gröbnerbasen (5)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,
$$f = X_1^2 + X_2^{12}X_3^{18}, \quad g = X_1X_2^8 + X_2^7X_3^9.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen
$$\mathrm{S}(f,g) = X_2^8 \cdot f - X_1 \cdot g = -X_1X_2^7X_3^9 + X_2^{20}X_3^{18}.$$
Wir setzen $h := X_1X_2^7X_3^9 - X_2^{20}X_3^{18}$ und sehen, dass
$$\mathrm{S}(f,h) = X_2^7X_3^9 \cdot f - X_1 \cdot h = X_2^{12}X_3^{18} \cdot g$$
und
$$\mathrm{S}(g,h) = X_3^9 \cdot g - X_2 \cdot h = X_2^{21}X_3^{18} + X_2^7X_3^{18}$$
ist. Mit $q := X_2^{21}X_3^{18} + X_2^7X_3^{18}$ bemerken wir, dass $S(f,q)$ bezüglich (f,q) speziell erzeugbar ist (vgl. Lemma 2/5/27). Wir berechnen $\mathrm{S}(g,q)$ wie oben und sehen, dass bei Division durch (g,q) der Rest 0 auftritt,
$$\mathrm{S}(g,q) = X_2^{13}X_3^{18} \cdot g - X_1 \cdot q = -X_3^9 \cdot h.$$
Offensichtlich gilt
$$\mathrm{S}(h,q) = X_2^{14}X_3^9 \cdot h - X_1 \cdot q = -X_3^9 \cdot h - X_2^{13}X_3^9 \cdot q.$$
Daher ist
$$(f,g,h,q) = (X_1^2 + X_2^{12}X_3^{18}, X_1X_2^8 + X_2^7X_3^9, X_1X_2^7X_3^9 - X_2^{20}X_3^{18}, X_2^{21}X_3^{18} + X_2^7X_3^{18})$$
eine Gröbnerbasis des von f, g erzeugten Ideals. Wir überzeugen uns leicht davon, dass diese sogar reduziert ist.

Aufgabe 2/5/090 (S: Varianten)

Gröbnerbasen (6)

Index: reduzierte Gröbnerbasis, lexikographische Ordnung, Ideal

Stoffeinheiten: 2/5/28 - 2/5/31 Reduzierte Gröbnerbasen

Bestimmen Sie (bezüglich der lexikographischen Ordnung) die reduzierte Gröbnerbasis für das Ideal in $\mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$, das durch die folgenden Polynome f und g erzeugt wird,
$$f = X_1^2 + X_2^9X_3^{10}, \quad g = X_1X_2^{17} + X_2^8X_3^5.$$

Lösung. Wir gehen im Wesentlichen so vor wie beim Buchberger-Algorithmus und bestimmen

$$\mathrm{S}(f,g) = X_2^{17}\cdot f - X_1\cdot g = -X_1X_2^8X_3^5 + X_2^{26}X_3^{10}.$$

Wir setzen $h := X_1X_2^8X_3^5 - X_2^{26}X_3^{10}$ und erhalten

$$\mathrm{S}(f,h) = X_2^8X_3^5\cdot f - X_1\cdot h = X_2^9X_3^{10}\cdot g,$$

$$\mathrm{S}(g,h) = X_3^5\cdot g - X_2^9\cdot h = X_2^{35}X_3^{10} + X_2^8X_3^{10}.$$

Mit $q := X_2^{35}X_3^{10} + X_2^8X_3^{10}$ ergibt sich, dass $S(f,q)$ bezüglich (f,q) speziell erzeugbar ist (vgl. Lemma 2/5/27). Wir berechnen $\mathrm{S}(g,q)$ wie oben und sehen, dass dieses Polynom bei Division durch (h,g,q) den Rest 0 hat, denn

$$\mathrm{S}(g,q) = X_2^{18}X_3^{10}\cdot g - X_1\cdot q = -X_3^5\cdot h.$$

Offensichtlich ist

$$\begin{aligned}\mathrm{S}(h,q) &= X_2^{27}X_3^5\cdot h - X_1\cdot q = -X_1X_2^8X_3^{10} - X_2^{53}X_3^{15}\\ &= -X_3^5\cdot h - X_2^{18}X_3^5\cdot q\end{aligned}$$

speziell erzeugt bezüglich (h,q). Daher erhalten wir

$$(f,g,h,q) =$$
$$(X_1^2 + X_2^9X_3^{10}, X_1X_2^{17} + X_2^8X_3^5, X_1X_2^8X_3^5 - X_2^{26}X_3^{10}, X_2^{35}X_3^{10} + X_2^8X_3^{10})$$

als Gröbnerbasis des von f,g erzeugten Ideals. Diese ist offensichtlich reduziert.

Aufgaben zum Kapitel 3

Aufgabe 3/1/010
Beispiele für Unterräume

Index: Vektorraum, Unterraum, Unterraumkriterium

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ über den reellen Zahlen betrachten wir die folgenden Teilmengen; entscheiden Sie in jedem Fall, ob ein Untervektorraum vorliegt.

(1) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y - z = 0\}$

(2) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + 2z = 3 \text{ oder } x = y\}$

(3) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x - y + 2z = 0 \text{ oder } x = y\}$

(4) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = n,\ y = 2n,\ z = 3n, \text{ mit } n \in \mathbb{Z}\}$

(5) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } z = 0\}$

Aufgabe 3/1/020
Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme als Unterräume

Index: Vektorraum, Unterraum, Unterraumkriterium

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

(1) Im reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ bezeichne U die Menge aller (x, y, z) mit
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 0 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass U ein Unterraum ist.

(2) W sei die Menge aller (x, y, z) mit
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 1 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$
Zeigen Sie, dass W kein Unterraum ist!

(3) $L \subseteq K^n$ sei die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots\ \vdots\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$
über dem Körper K. Zeigen Sie, dass L genau dann ein Unterraum des Standardraumes K^n über K ist, wenn das obige System homogen ist (d.h. $b_1 = \ldots = b_m = 0$).

Aufgabe 3/1/030
Zahlenfolgen als Unterräume

Index: Vektorraum, Unterraum, Unterraumkriterium

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum V aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen a_n. Entscheiden Sie in jedem der folgenden Fälle, ob die betreffende Teilmenge einen Unterraum bildet.

(1) $U_1 := \{(a_n) \in V \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 0\}$

(2) $U_2 := \{(a_n) \in V \mid \lim_{n\to\infty}(a_n) = 1\}$

(3) $U_3 := \{(a_n) \in V \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 1\}$

(4) $U_4 := \{(a_n) \in V \mid (a_n) \text{ konvergiert}\}$

(5) $U_5 := \{(a_n) \in V \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \,:\, a_n = a_{n+1} \text{ für } n \geq n_0\}$.

Aufgabe 3/1/040
Summe zweier Unterräume

Index: Vektorraum, Unterraum, Summe zweier Unterräume

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

Im Standardvektorraum $V = K^3$ über dem Körper K betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 |\; x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$
$$U_2 = K \cdot (1, 1, 1) := \{t \cdot (1, 1, 1) |\; t \in K\}.$$

Zeigen Sie: Für $K = \mathbb{R}$ ist $U_1 + U_2 = V$. Gilt dies auch im Falle $K = \mathbb{F}_3$?

Aufgabe 3/1/050
Ist die Vereinigung zweier Unterräume ein Unterraum?

Index: Vektorraum, Unterraum, Unterraumkriterium, Summe zweier Unterräume

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die Vereinigung zweier Unterräume eines K-Vektorraumes V wieder ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 3/1/060
Beispiele für Homomorphismen (1)

Index: Vektorraum, Unterraum, Erzeugendensystem eines Vektorraumes, Homomorphismus von Vektorräumen

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

V sei ein K-Vektorraum und $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$. Wir definieren eine Abbildung $f : K^n \to V$ durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) := x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n.$$

Zeigen Sie:

(1) f ist eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ ein Erzeugendensystem von V bildet.

Aufgabe 3/1/070
Beispiele für Homomorphismen (2)

Index: Vektorraum, Unterraum, Homomorphismus von Vektorräumen, Bild und Kern einer linearen Abbildung

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

Es sei V der reelle Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sowie $d : V \to V$ derjenige Homomorphismus, der der Abbildung f ihre Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ zuordnet.

(1) Ist d injektiv?

(2)* Geben Sie $\mathrm{im}(d)$ und $\ker(d)$ an!

Aufgabe 3/1/080
Rechnen mit Unterräumen

Index: Vektorraum, Unterraum

Stoffeinheiten: 3/1/12 - 3/1/23 Untervektorräume

U_1, U_2 und U_3 seien Unterräume des K-Vektorraumes V. Für Teilmengen $M, M' \subseteq V$ wird mit $M + M'$ die Menge

$$\{m + m' \mid m \in M,\ m' \in M'\}$$

bezeichnet. Zeigen Sie:

(1) $U_1 + U_1 = U_1$,

(2) $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$,

(3) $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$,

(4) $(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3)$,

(5) $U_1 + (U_2 \cap U_3) \subseteq (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$,

(6) $U_1 \subseteq U_3 \Rightarrow U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap U_3$.

Aufgabe 3/2/010
Innere direkte Summen (1)

Index: Vektorraum, Unterraum, direkte Summe von Unterräumen, innere direkte Summe

Stoffeinheiten: 3/2/1 - 3/2/5 Innere direkte Summe

Im Standardraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren $\boldsymbol{x} = (1,1,1,0)$, $\boldsymbol{y} = (1,2,1,1)$, $\boldsymbol{z} = (1,3,1,2)$. Mit $U := \mathbb{R}\boldsymbol{x} + \mathbb{R}\boldsymbol{y} + \mathbb{R}\boldsymbol{z}$ bezeichnen wir den von ihnen erzeugte Unterraum und setzen weiter $V := \mathbb{R}\boldsymbol{x} + \mathbb{R}\boldsymbol{y}$.

(1) Entscheiden Sie, welche der folgenden Beziehungen gilt:

  a) $U = \mathbb{R}x \bigoplus \mathbb{R}y$

  b) $U = \mathbb{R}x \bigoplus \mathbb{R}z$

  c) $U = V \bigoplus \mathbb{R}z$

(2) Finden Sie einen Unterraum W mit der Eigenschaft, dass $\mathbb{R}^4 = U \bigoplus W$ ist!

Aufgabe 3/2/020
Innere direkte Summen (2)

Index: Vektorraum, Unterraum, direkte Summe von Unterräumen, innere direkte Summe

Stoffeinheiten: 3/2/1 - 3/2/5 Innere direkte Summe

Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ quadratischer Matrizen. Mit U_1, U_2 bezeichnen wir die folgenden Teilmengen:

$$U_1 := \{(a_{ij}) \in V|\ a_{ij} = 0\ \textit{für}\ i \neq j\},$$
$$U_2 := \{(a_{ij})|\ a_{ij} = 0\ \textit{für}\ i + j \neq n + 1\}.$$

(1) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die Mengen U_1, U_2 Unterräume von V sind.

(2) Zeigen Sie, dass für $n = 2$ gilt: $V = U_1 \bigoplus U_2$.

(3)* Geben Sie eine Verallgemeinerung für (2) an!

Aufgabe 3/2/040 (S: Varianten)
Lineare Codes, Decodierung (1)

Index: Vektorraum, Code, Maximum-Likelyhood Decodierung

Stoffeinheiten: 3/2/12 - 3/2/16 Der Homomorphiesatz für Vektorräume

C sei der lineare Code im 8-dimensionalen Standardraum über $\mathbb{F}_2$, der als Lösungsmenge von $A\cdot{}^{\mathrm{t}}x = 0$ in $\mathbb{F}_2^8$ gegeben ist, wobei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&0&1&0&1 \\ 1&1&1&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

bezeichnet. Decodieren Sie die Wörter

$\boldsymbol{u}_1 = (0,1,0,1,1,0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,1,1,0,0,0,1,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1,0,0,1,1,0)$.

Lösung. Wir finden leicht eine Basis von C, die durch die Wörter

$$\boldsymbol{v}_1 = (0,0,0,1,1,1,0,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (0,1,0,1,0,1,1,0),$$
$$\boldsymbol{v}_3 = (1,0,0,0,1,1,1,0),\ \boldsymbol{v}_4 = (0,0,1,1,1,0,1,0)$$

gegeben ist. Die Wörter

$$\boldsymbol{a}_1 = (0,0,0,0,0,0,1,0),\ \boldsymbol{a}_2 = (0,0,0,1,0,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{a}_3 = (0,0,0,0,1,0,0,0),\ \boldsymbol{a}_4 = (0,0,0,0,0,1,0,0)$$

erzeugen in $\mathbb{F}_2^8$ einen lineare Unterraum L mit $L \bigoplus C = \mathbb{F}_2^8$. Dann ist $\mathbb{F}_2^8$ Vereinigung von Klassen der folgenden Vektoren modulo C:

$\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4,$
$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4.$

Wir setzen

$$\boldsymbol{a}_5 = (0,0,0,0,0,0,0,1),\ \boldsymbol{a}_6 = (0,1,0,0,0,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{a}_7 = (1,0,0,0,0,0,0,0),\ \boldsymbol{a}_8 = (0,0,1,0,0,0,0,0)$$

und bemerken, dass

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_8 + \boldsymbol{v}_4,\ \ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_6 + \boldsymbol{v}_2,$$
$$\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{v}_1,\ \ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_7 + \boldsymbol{v}_3,$$
$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{v}_1.$$

Die Vektoren $\boldsymbol{a}_i$ auf den rechten Seiten haben jeweils ein kleineres Gewicht. Nun ist $\mathbb{F}_2^8$ die Vereinigung von Klassen der folgenden Vektoren modulo C:

$0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_4,$
$\boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_6, \boldsymbol{a}_7, \boldsymbol{a}_8, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_5.$

Offensichtlich haben diese Wörter minimales Gewicht. Wir sehen, dass

$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3,\ \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4$

ist. Daher sind $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ bzw. $\boldsymbol{u}_3$ durch

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (0,1,0,0,1,0,1,1),$$
$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = (1,1,0,0,0,1,0,1),$$
$$\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_4 = (1,1,1,0,0,0,1,0)$$

decodiert.

Aufgabe 3/2/041 (S: Varianten)

Lineare Codes, Decodierung (2)

Index: Vektorraum, Code, Maximum-Likelyhood Decodierung

Stoffeinheiten: 3/2/12 - 3/2/16 Der Homomorphiesatz für Vektorräume

C sei der lineare Code im 6-dimensionalen Standardraum über $\mathbb{F}_2$, der als Lösungsmenge von $A \cdot {}^{\mathrm{t}}x = 0$ in $\mathbb{F}_2^6$ gegeben ist, wobei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}.$$

bezeichnet. Decodieren Sie die Wörter

$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,1,0,1,0),\ \boldsymbol{u}_2 = (0,0,1,1,0,1),\ \boldsymbol{u}_3 = (0,1,1,0,0,1).$

Lösung. Eine Basis von C ist durch

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,0,1,0,0,1),\ \boldsymbol{v}_2 = (1,0,0,1,1,0),\ \boldsymbol{v}_3 = (0,1,1,1,0,0)$$

gegeben. Die Wörter

$$\boldsymbol{a}_1 = (0,0,1,0,0,0),\ \boldsymbol{a}_2 = (1,0,0,0,0,0),\ \boldsymbol{a}_3 = (0,0,0,1,0,0)$$

erzeugen in $\mathbb{F}_2^6$ einen linearen Unterraum L mit $L \oplus C = \mathbb{F}_2^6$. Dann ist $\mathbb{F}_2^6$ Vereinigung von Klassen der folgenden Vektoren modulo C:

$\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3.$

Wir setzen

$$\boldsymbol{a}_4 = (0,0,0,0,0,1),\ \boldsymbol{a}_5 = (0,0,0,0,1,0),\ \boldsymbol{a}_6 = (0,1,0,0,0,0)$$

und bemerken, dass

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{v}_1,\ \ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_6 + \boldsymbol{v}_3,$$
$$\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{v}_2,\ \ \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{v}_2.$$

$\mathbb{F}_2^6$ ist nun Vereinigung von Klassen der folgenden Vektoren modulo C:

$\boldsymbol{0}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_6, \boldsymbol{a}_5, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_5.$

Offensichtlich haben diese Wörter minimales Gewicht. Wir sehen, dass

$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{a}_6 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_5 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1$

ist. Damit werden $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ bzw. $\boldsymbol{u}_3$ durch

$$\boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_2 = (1,1,1,0,1,0),$$
$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (0,0,1,1,1,1),$$
$$\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{v}_1 = (0,1,0,0,1,1)$$

decodiert.

Aufgabe 3/2/050

Schnitt eines Homomorphismus

Index: Vektorraum, Homomorphismus von Vektorräumen, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Homomorphiesatz für Vektorräume

Stoffeinheiten: 3/2/17 - 3/2/24 Exakte Folgen

Wir betrachten einen Homomorphismus $f : V \to W$ von K-Vektorräumen. Zeigen Sie: Es existiert genau dann eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \cdot f = \mathrm{id}_V$, wenn $\ker(f) = \{0\}$.

Aufgabe 3/2/060

$\mathrm{Hom}(V, W)$ als Vektorraum

Index: Vektorraum, Homomorphismus von Vektorräumen, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Mengen von Vektorraumhomomorphismen

Stoffeinheiten: 3/2/17 - 3/2/24 Exakte Folgen

$\varphi : V \to W$ sei ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen. Wir definieren für beliebige K-Vektorräume Z eine Abbildung

$$\Phi_Z : \mathrm{Hom}_K(Z, V) \to \mathrm{Hom}_K(Z, W)$$

durch $\Phi_Z(\sigma) := \varphi \cdot \sigma$. Zeigen Sie, dass dann auch Φ_Z ein surjektiver Homomorphismus von K-Vektorräumen ist.

Aufgabe 3/2/070

Exakte Folgen zerfallen

Index: Vektorraum, exakte Folge von Vektorräumen, Isomorphismus von Vektorräumen, direkte Summe von Vektorräumen, Komplementärraum

Stoffeinheiten: 3/2/17 - 3/2/24 Exakte Folgen

Wir betrachten eine Folge

$$0 \longrightarrow V' \longrightarrow V \longrightarrow V'' \longrightarrow 0$$

linearer Abbildungen von K-Vektorräumen mit der Eigenschaft, dass das Bild jedes auftretenden Homomorphismus gleich dem Kern des nachfolgenden ist (d.h. es liegt eine *exakte Folge* vor). Beweisen Sie, dass V zu $V' \bigoplus V''$ isomorph ist.

Aufgabe 3/2/080

Faktorräume und Isomorphie (1)

Index: Vektorraum, Isomorphismus von Vektorräumen, Unterraum, Faktorraum

Stoffeinheiten: 3/2/17 - 3/2/24 Exakte Folgen

U, U_1 und U_2 seien Unterräume des Vektorraumes V und $U_1 \subseteq U_2$. Beweisen Sie:

(1) $(U_2 \cap U)/(U_1 \cap U)$ ist isomorph zu einem Unterraum von U_2/U_1.

(2) $(U_2 + U)/(U_1 + U)$ ist isomorph zu einem Faktorraum von U_2/U_1.

Aufgabe 3/2/090

Faktorräume und Isomorphie (2)

Index: Vektorraum, Isomorphismus von Vektorräumen, Unterraum

Stoffeinheiten: 3/2/17 - 3/2/24 Exakte Folgen

Beweisen Sie: Sind U_1 und U_2 Unterräume des Vektorraumes U_3 und $U_1 \subseteq U_2$, so ist U_2/U_1 Kern eines kanonischen Homomorphismus

$$U_3/U_1 \to U_3/U_2, \quad \boldsymbol{v} + U_1 \mapsto \boldsymbol{v} + U_2,$$

der einen Isomorphismus $(U_3/U_1)/(U_2/U_1) \cong U_3/U_2$ induziert.

Aufgabe 3/3/010 (S: Varianten)

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren und Erzeugendensysteme

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren, Erzeugendensystem eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

Wir betrachten die Vektoren

(1) $(-1,-2,-2),\ (2,0,-2),\ (2,-2,1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,

(2) $(0,1,0),\ (1,1,-1),\ (1,1,0)$ im $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $\mathbb{F}_3^3$,

(3) $(0,0,-2,0),\ (-2,0,2,0),\ (2,-2,1,0)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$,

(4) $\frac{1}{3},\ \frac{4}{5},\ \frac{7}{11}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,

(5) $(0,-(i+2)),\ (-(i-2),-i)$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$,

(6)* $\ln(2),\ \ln(3)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem bzw. ein linear unabhängiges System bilden.

Ergebnis. Die angegebenen Vektoren sind

(1) linear unabhängig und ein Erzeugendensystem,

(2) linear unabhängig und ein Erzeugendensystem,

(3) linear unabhängig, kein Erzeugendensystem,

(4) linear abhängig, kein Erzeugendensystem,

(5) linear unabhängig und Erzeugendensystem,

(6) linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem.

Aufgabe 3/3/020 (S: Varianten)
Linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{C}^2$

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren, komplexe Zahlen

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

Prüfen Sie, ob die Vektoren $(2i, (i-2))$, $((4i-1), -5) \in \mathbb{C}^2$ linear unabhängig sind, wenn

(1) $\mathbb{C}^2$ als Standardvektorraum über $\mathbb{C}$ bzw.

(2) $\mathbb{C}^2$ mittels der Inklusion $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$

betrachtet wird.

Ergebnis.

(1) Die Vektoren sind linear unabhängig.

(2) Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil induziert einen Isomorphismus von $\mathbb{C}^2$ und $\mathbb{R}^4$. Wir ordnen beispielsweise $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ den Vektor $(\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Im}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta), \mathrm{Im}(\beta)) \in \mathbb{R}^4$ zu. Dann entsprechen die gegebenen Vektoren

$$(0, 2, -2, 1),\ (-1, 4, -5, 0) \in \mathbb{R}^4$$

und sind daher linear unabhängig.

Aufgabe 3/3/030 (S: Varianten)
Lineare Codes, Fehlerkorrektur (1)

Index: Vektorraum, Code, fehlerkorrigierender Code, lineare Unabhängigkeit

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

C sei der lineare Code im 9-dimensionalen Standardraum über $\mathbb{F}_2$, der als Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ gegeben ist, wobei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&1&1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&0&1&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&0&1&1&1&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Ist C ein 1-Fehler-korrigierender Code?

Lösung. Die Spalten der Matrix A sind alle von der Nullspalte verschieden. Über dem Grundkörper $\mathbb{F}_2$ bedeutet dies, dass ein Paar solcher Spalten genau dann linear abhängig ist, wenn beide übereinstimmen.

Wir sehen, dass A zwei gleiche Spalten besitzt. Damit ist das minimale Gewicht von C gleich 2 (vgl. 3/3/2 Beispiel 10) und C ist kein 1-Fehler-korrigierender Code.

Aufgabe 3/3/031 (S: Varianten)
Lineare Codes, Fehlerkorrektur (2)

Index: Vektorraum, Code, fehlerkorrigierender Code, Gewicht eines Codewortes, Informationsrate eines Codes, lineare Unabhängigkeit

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

C sei der lineare Code im 8-dimensionalen Standardraum über $\mathbb{F}_2$, der als Lösungsmenge von $A\cdot{}^{t}x = 0$ gegeben ist,

$$A = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&1&0&0&0&0&1&1 \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie das minimale Gewicht von C.

(2) Ist C ein 2-Fehler-korrigierender Code?

(3) Welche Informationsrate hat C ?

Lösung. Die Spalten der Matrix A sind alle von der Nullspalte verschieden. Über dem Grundkörper $\mathbb{F}_2$ bedeutet dies, dass ein Paar solcher Spalten genau dann linear abhängig ist, wenn beide übereinstimmen.

Wir bemerken, dass A keine zwei übereinstimmenden Spalten besitzt. Dann ist das minimale Gewicht von C größer 2 (vgl. 3/3/2, Beispiel 10). Es ist auch nicht schwer zu sehen, dass keine Spalte von A Summe zweier anderer Spalten ist. Darüber hinaus gibt es vier linear abhängige Spalten. Es folgt, dass das minimale Gewicht von C gleich 4 ist; C muss daher ein 1-Fehler-korrigierender Code sein.

Die Informationsrate von C ist $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3/3/032 (S: Varianten)

Lineare Codes, Fehlerkorrektur (3)

Index: Vektorraum, Code, fehlerkorrigierender Code, Gewicht eines Codewortes, Informationsrate eines Codes, lineare Unabhängigkeit

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

C sei der lineare Code im 8-dimensionalen Standardraum über $\mathbb{F}_2$, der als Lösungsmenge von $A\cdot{}^{t}x = 0$ gegeben ist, wobei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1&1&0 \\ 1&0&0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

(1) Berechnen Sie das minimale Gewicht von C.

(2) Ist C ein 2-Fehler-korrigierender Code?

(3) Welche Informationsrate hat C ?

Lösung. Die Spalten der Matrix A sind alle von der Nullspalte verschieden. Über dem Grundkörper $\mathbb{F}_2$ bedeutet dies, dass ein Paar solcher Spalten genau dann linear abhängig ist, wenn beide übereinstimmen.

Wir bemerken, dass A keine zwei übereinstimmenden Spalten besitzt. Dann ist das minimale Gewicht von C größer 2 (vgl. 3/3/2, Beispiel 10).

Wir bemerken weiter, dass die Spalte 1 Summe der Spalten 8 und 4 von A ist. Es folgt, dass das minimale Gewicht von C gleich 3 ist und daher C ein 1-Fehler-korrigierender Code.
Die Informationsrate von C ist $\frac{1}{2}$.

Aufgabe 3/3/040
Lineare Unabhängigkeit Eigenschaften (1)

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren, Körper der reellen Zahlen als $\mathbb{Q}$-Vektorraum

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

Wir betrachten den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als $\mathbb{Q}$-Vektorraum; $(1, a)$ mit $a \in \mathbb{R}$ sei ein Zahlenpaar. Zeigen Sie: $(1, a)$ ist genau dann linear abhängig, wenn $a \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3/3/050
Lineare Unabhängigkeit, Eigenschaften (2)

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren, Unterraum

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

U_1, U_2 seien Unterräume des K-Vektorraumes V und $\boldsymbol{v}_i \in U_i \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ Vektoren ($i = 1, 2$). Zeigen Sie:

(1) Das Paar $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ ist linear unabhängig, falls $U_1 \cap U_2 = \boldsymbol{0}$ ist.

(2) Die beiden Bedingungen unter (1) sind äquivalent, sofern überdies $U_1 = K \cdot \boldsymbol{v}_1$ und $U_2 = K \cdot \boldsymbol{v}_2$ vorausgesetzt wird.

Aufgabe 3/3/060
Lineare Unabhängigkeit, Eigenschaften (3)

Index: Vektorraum, linear abhängige Vektoren, Linearkombination

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

Es sei $(\boldsymbol{v}_i)_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ des K-Vektorraumes V. Wir setzen voraus, dass die Indexmenge I mindestens zwei Elemente hat. Beweisen Sie die folgende Behauptung.

Es existieren ein $i \in I$ sowie Zahlen $a_j \in K$, $a_j = 0$ für fast alle $j \in I$, so dass $\boldsymbol{v}_i = \sum_{j \in I - \{i\}} a_j \boldsymbol{v}_j$ ist.

Aufgabe 3/3/070
Lineare Unabhängigkeit, Eigenschaften (4)

Index: Vektorraum, linear abhängige Vektoren, Linearkombination

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

Geben Sie ein konkretes Beispiel für die folgende Situation an:

V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ sind linear abhängig, aber $\boldsymbol{v}_1$ ist nicht Summe von Vielfachen der übrigen Vektoren $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$.

Aufgabe 3/3/080
Lineare Unabhängigkeit, Eigenschaften (5)

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren

Stoffeinheiten: 3/3/1 - 3/3/4 Lineare Unabhängigkeit

Im K-Vektorraum V fixieren wir Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$, $n \geq 2$. Zeigen Sie: Das $(n-1)$-Tupel $(\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_n, \dots, \boldsymbol{a}_{n-1} - \boldsymbol{a}_n)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n - \boldsymbol{a}_1)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3/3/090 (S: Varianten)
Basen und Koordinaten (1)

Index: Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/3/5 - 3/3/16 Basen von Vektorräumen

Nachfolgend ist in jedem Fall ein Vektorraum V mit einer Familie $\mathcal{B}$ von Vektoren gegeben. Prüfen sie jeweils, ob $\mathcal{B}$ eine Basis ist und bestimmen Sie in diesem Fall die Koordinaten von $\boldsymbol{x} \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$.

(1) $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ mit $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ im Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ sowie $\boldsymbol{x} = (1,-3,1)$.
(2) V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} := (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ mit $\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-1,-1,-1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1,0,1)$ und $\boldsymbol{x} = (1,-1,-1)$.
(3) V sei der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^3$, sowie $\mathcal{B} = ((1,1,1),(0,1,1),(1,1,0))$, $\boldsymbol{x} = (0,1,1)$.
(4) $V = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$ sei der von $\{1, \sqrt{2}\}$ erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $\mathcal{B} := (3, \sqrt{2})$ sowie $\boldsymbol{x} = (1+\sqrt{8})^2$.

Ergebnis.

(1) $\mathcal{B}$ ist eine Basis (kanonische Basis des gegebenen Standardraumes). Die gesuchten Koordinaten sind $(1,-3,1)$.
(2) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$.
(3) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(0,1,0)$.
(4) $\mathcal{B}$ ist eine Basis. Die Koordinaten von $\boldsymbol{x}$ sind $(3,4)$.

Aufgabe 3/3/100 (S: Varianten)
Basen und Koordinaten (2)

Index: Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_4$ eine Basis des Standardvektorraumes $\mathbb{R}^4$ bilden und geben Sie die Koordinaten von $\boldsymbol{v} = (-2,-3,-1,-8)$ bezüglich $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ an.

$$b_1 = (0,-1,1,-1), \quad b_2 = (-2,-1,1,2),$$
$$b_3 = (-1,0,1,-2), \quad b_4 = (-1,-2,-1,-1)$$

Lösung. Wir bilden zunächst die Matrix $A \in \mathrm{M}(4;\mathbb{R})$ aus den Spalten ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{b}_i$ sowie daraus die Matrix $B \in \mathrm{M}(4,5;\mathbb{R})$, indem wir als letzte Spalte das Quadrupel ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}$ hinzufügen. B ist erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems; durch Zeilentransformationen erhalten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix eines äquivalenten Systems in Stufenform:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 & -8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir sehen insbesondere, dass die aus den ersten 4 Spalten gebildeten Teilmatrix und daher auch A den Rang 4 hat, d.h. $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3, \boldsymbol{b}_4)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$.
Schrittweises Einsetzen ergibt nun als Lösung des Systems $Ax = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}$ die gesuchten Zahlen x_i mit $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 + x_4\boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{v}$.
$\boldsymbol{v}$ hat die Koordinaten $(0,-1,2,2)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 3/3/110 (S: Varianten)
Rechenbeispiele zur Basisauswahl

Index: Vektorraum, Unterraum, Basis eines Vektorraumes, lineare Hülle

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Im Vektorraum $\mathbb{R}^5$ wird durch $U := \mathbb{R}\boldsymbol{a} + \mathbb{R}\boldsymbol{b} + \mathbb{R}\boldsymbol{c} + \mathbb{R}\boldsymbol{d} + \mathbb{R}\boldsymbol{e}$ ein Unterraum gegeben, wobei

$\boldsymbol{a} = (1,0,1,-2),\ \boldsymbol{b} = (0,1,-1,-2),\ \boldsymbol{c} = (2,1,1,-6),$
$\boldsymbol{d} = (2,1,-2,-2),\ \boldsymbol{e} = (1,-1,2,0).$

Wählen Sie aus der Menge $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}\}$ der Erzeugenden von U eine Basis aus!

Ergebnis. Die Vektoren $(1,0,1,-2)$, $(0,1,-1,-2)$, $(2,1,-2,-2)$ bilden eine Basis von U.

Aufgabe 3/3/120 (S: Varianten)
Basen in Unterräumen von $\mathbb{R}[X]$ (1)

Index: Vektorraum, Unterraum, Basis eines Vektorraumes, Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/3/5 - 3/3/16 Basen von Vektorräumen

Wir betrachten den Untervektorraum $\mathrm{P}_2 \subseteq \mathbb{R}[X]$ des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Polynome über dem Körper der reellen Zahlen, der durch die Polynome vom Grad ≤ 2 gebildet wird. Zeigen Sie, dass $(-2, X+1, X^2-X-2)$ eine Basis von P_2 ist und bestimmen Sie die Koordinaten des Polynoms $f = 3X^2 - 2X - 2$ bezüglich dieser Basis.

Ergebnis. Die Darstellung von f als Vielfachensumme der gegebenen Polynome führt nach Koeffizientenvergleich auf ein leicht zu lösendes lineares Gleichungssystem. Wir erhalten hat die Koordinaten $(-\frac{3}{2},1,3)$.

Aufgabe 3/3/130 (S: Varianten)
Basen in Unterräumen von $\mathbb{R}[X]$ (2)

Index: Vektorraum, Unterraum, Basis eines Vektorraumes, Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/3/5 - 3/3/16 Basen von Vektorräumen

Wir bezeichnen mit P_3 die Menge aller Polynome vom Grad ≤ 3 im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$.

(1) Zeigen Sie: P_3 ist ein Unterraum von $\mathbb{R}[X]$.
(2) Beweisen Sie, dass $\mathcal{B} = (g_0, g_1, g_2, g_3)$ mit $g_i := (1 - X)^i$ eine Basis für P_3 bildet.
(3) Bestimmen Sie die Koordinaten von $h := X^2 - X$ bezüglich dieser Basis.

Ergebnis für (3). Das Polynom h hat die Koordinaten $(0, -1, 1, 0)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Aufgabe 3/3/140 (S: Varianten)
Basisergänzung im $\mathbb{R}^5$

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren, Basisergänzungssatz

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^5$ betrachten wir die Vektoren

$$(1, -1, -1, 0, -1),\ (0, 2, -1, 1, -1),\ (-2, 2, -2, 0, -2).$$

Wählen Sie ein maximales System linear unabhängiger Vektoren aus und ergänzen Sie dieses zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

Ergebnis. Die Vektoren

$$(1, -1, -1, 0, -1),\ (0, 2, -1, 1, -1),\ (-2, 2, -2, 0, -2),$$
$$(1, 0, 0, 0, 0),\ (0, 0, 1, 0, 0)$$

bilden eine Basis des Standardraumes $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 3/3/150 (S: Varianten)
Austauschverfahren

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren, Basis eines Vektorraumes, Austauschverfahren

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Im Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1, -2),\quad \boldsymbol{v}_2 = (2, 0, -2, 0),$$
$$\boldsymbol{v}_3 = (0, 0, -2, -1),\quad \boldsymbol{v}_4 = (1, -1, 1, 0)\ \text{ und}$$
$$\boldsymbol{w}_1 = (-2, 0, -2, 0),\quad \boldsymbol{w}_2 = (-1, 0, -7, -2).$$

(1) Überprüfen Sie, dass $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ eine Basis bilden und $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ linear unabhängig sind.
(2) Verwenden Sie das Austauschverfahren zur Bestimmung einer Basis der Gestalt $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2})$.

Lösung. Mit A bezeichnen wir die Matrix, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_i$ gebildet werden,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Zeilenoperationen wird diese leicht in die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

überführt, die offensichtlich 4 Stufen und daher den vollen Rang $4 = \operatorname{rang}(A') = \operatorname{rang}(A)$ hat. Daher ist $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Nun fügen wir zu A auf der linken Seite die durch $\boldsymbol{w}_1$ und $\boldsymbol{w}_2$ gebildeten Spalten hinzu und führen wiederum Zeilenoperationen aus, die diese Matrix in Zeilenstufenform transformieren,

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & -7 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden die Spalten der ersten Matrix, deren Positionen durch die Stufenindizes der zweiten gegeben sind, eine Familie linear unabhängiger Vektoren. Insbesondere bilden die ersten beiden Spalten und damit $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2)$ ein linear unabhängiges Paar. Wir erhalten die Basis

$$((-2,0,-2,0),(-1,0,-7,-2),(1,-1,1,-2),(2,0,-2,0)).$$

Aufgabe 3/3/160 (S: Varianten)

Basen von Komplementärräumen

Index: Vektorraum, Unterraum, Basis eines Vektorraumes, linear unabhängige Vektoren, Komplementärraum

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie im reellen Standardraum $\mathbb{R}^5$ einen Komplementärraum zum Unterraum

$$U := \mathbb{R}\cdot(0,0,1,0,1) + \mathbb{R}\cdot(0,-1,0,1,0) + \mathbb{R}\cdot(0,-1,0,0,-1)$$

und beschreiben Sie ihn durch eine Basis.

Ergebnis. Wir wenden eine Variante des Austauschverfahrens an, indem wir die gegebenen Erzeugenden $\boldsymbol{w}_1 = (0,0,1,0,1)$, $\boldsymbol{w}_2 = (0,-1,0,1,0)$ und $\boldsymbol{w}_3 = (0,-1,0,0,-1)$ als Spalten einer Matrix A anordnen und die Matrix

$$B := (A, \mathrm{E}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Zeilenoperationen in eine Stufenmatrix

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

überführen. Durch die Positionen der Stufenindizes wird aus dem Erzeugendensystem $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_5\}$ eine Basis des Raumes $\mathbb{R}^5$ ausgewählt, die eine Basis von U enthält (wir mussten auf diese Weise nicht voraussetzen, dass die Vektoren $\boldsymbol{w}_i$ linear unabhängig sind).
Die Vektoren $\boldsymbol{e}_i$ zu den verbleibenden Stufenpositionen erzeugen einen Komplementärraum für U, dieser besitzt damit eine Basis

$$((1,0,0,0,0),\ (0,1,0,0,0)).$$

Aufgabe 3/3/170
Eine Eigenschaft von Basen

Index: Vektorraum, linear unabhängige Vektoren, Basis eines Vektorraumes, Dimension eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/17 - 3/3/21 Dimension

V sei ein 2-dimensionaler reeller Vektorraum, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ Vektoren sowie $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = 0$. Wir setzen voraus, dass das Paar $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ linear unabhängig ist. Zeigen Sie: Je zwei dieser Vektoren bilden eine Basis.

Aufgabe 3/3/180 (S: Varianten)
Existenz der linearen Fortsetzung von Abbildungen

Index: Vektorraum, lineare Fortsetzung, lineare Abbildung

Stoffeinheiten: 3/3/17 - 3/3/21 Dimension

V bezeichnet den reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ und W den reellen Standardraum $\mathbb{R}^2$.

(1) Existiert eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft
$$f(0,0,-2) = (-3,2)$$
$$f(-1,2,-2) = (-2,-3)$$
$$f(1,-2,-2) = (-2,5)\ ?$$
(2) Existiert eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit der Eigenschaft
$$f(-1,-1,2) = (-2,-1)$$
$$f(-1,1,1) = (-2,2)$$
$$f(-2,1,-1) = (-4,-1)\ ?$$
(3) Geben Sie eine Verallgemeinerung Ihres Resultats an!

Lösung zu (1), (2).

(1) Offenbar ist
$$(1,-2,-2) = 2\cdot(0,0,-2) - 1\cdot(-1,2,-2);$$
wäre f linear, so hätten wir
$$f(1,-2,-2) = 2\cdot f(0,0,-2) - 1\cdot f(-1,2,-2) = (-4,7) \neq (-2,5).$$
Folglich kann f nicht linear sein.

(2) $f(x, y, z) = (2x, x + 2y + z).$

Aufgabe 3/3/190 (S: Varianten)
Basen in Faktorräumen

Index: Vektorraum, Unterraum, Faktorraum, Basis eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Im Standardvektorraum $V = R^4$ sei durch $U := \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{a} + \mathbb{R} \cdot \boldsymbol{b}$ ein Unterraum gegeben mit $\boldsymbol{a} = (2, -1, 0, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 1, 2, -2)$.

(1) Zeigen Sie, dass die Vektoren
$$\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -1, -1) \text{ und } \boldsymbol{v}_2 = (1, 1, -5, 1)$$
dieselbe Klasse im Faktorraum V/U haben.

(2) Geben Sie eine Basis für V/U an.

(3) Geben Sie die Klasse des Vektors von $\boldsymbol{v} = (2, 1, -2, -1)$ als Vielfachensumme der Vektoren der unter (2) gefundenen Basis an!

Ergebnis.

(1) Es ist $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = (0, -1, -4, 2) = -1 \cdot (2, -1, 0, 2) - 2 \cdot (-1, 1, 2, -2) \in U$, daher $\overline{\boldsymbol{v}}_1 = \overline{\boldsymbol{v}}_2 \in V/U$.

(2) Die Klassen der Vektoren: $\boldsymbol{c} = (1, 0, 0, 0)$ und $\boldsymbol{d} = (0, 1, 0, 0)$ bilden eine Basis $(\overline{\boldsymbol{c}}, \overline{\boldsymbol{d}})$ in V/U.

(3) Es gilt $\overline{\boldsymbol{v}} = 4 \cdot \overline{\boldsymbol{c}} + \frac{1}{2} \cdot \overline{\boldsymbol{d}}$.

Aufgabe 3/3/200 (S: Varianten)
Dimension von Bild und Kern einer linearen Abbildung

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Dimension eines Vektorraumes, lineare Abbildung

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, die durch die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 6 & -4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
gegeben ist.

Lösung. Es ist $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 5 - \dim(\ker(\varphi))$. Wir bestimmen den Rang der Matrix A, indem wir sie (beispielsweise mit dem gaußschen Algorithmus) in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix überführen. Es ergibt sich

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

daher $\dim(\ker(\varphi)) = 3$ und $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 2$.

Aufgabe 3/3/202 (S: Varianten)

Dimension von Bild und Kern, Charakteristik 2

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Dimension eines Vektorraumes, lineare Abbildung

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_2^5 \to \mathbb{F}_2^5$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Lösung. Es ist $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 5 - \dim(\ker(\varphi))$. Wir bestimmen den Rang der Matrix A, indem wir sie (beispielsweise mit dem gaußschen Algorithmus) in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix überführen. Es ergibt sich

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

daher $\dim(\ker(\varphi)) = 3$ und $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 2$.

Aufgabe 3/3/203 (S: Varianten)

Dimension von Bild und Kern, Charakteristik 3

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Dimension eines Vektorraumes, lineare Abbildung

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_3^5 \to \mathbb{F}_3^5$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Lösung. Es ist $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 5 - \dim(\ker(\varphi))$. Wir bestimmen den Rang der Matrix A, indem wir sie (beispielsweise mit dem gaußschen Algorithmus) in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix überführen. Es ergibt sich

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

daher $\dim(\ker(\varphi)) = 2$ und $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 3$.

Aufgabe 3/3/205 (S: Varianten)

Dimension von Bild und Kern, Charakteristik 5

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Dimension eines Vektorraumes, lineare Abbildung

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Bestimmen Sie die Dimension des Bildes und des Kerns der linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{F}_5^5 \to \mathbb{F}_5^5$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Lösung. Es ist $\operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 5 - \dim(\ker(\varphi))$. Wir bestimmen den Rang der Matrix A, indem wir sie (beispielsweise mit dem gaußschen Algorithmus) in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix überführen. Es ergibt sich

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

daher $\dim(\ker(\varphi)) = 3$ und $\dim(\operatorname{im}(\varphi)) = 2$.

Aufgabe 3/3/210

Dimensionen der Vektorräume in exakten Folgen

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, exakte Folge, Dimension eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/17 - 3/3/21 Dimension

Wir betrachten eine Folge endlichdimensionaler K-Vektorräume V_i und linearer Abbildungen

$$\mathbf{0} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} \mathbf{0}\,,$$

für die $\mathrm{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$ gilt, $i = 0, \ldots, n-1$. Beweisen Sie

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot \dim_K(V_i) = 0.$$

Aufgabe 3/3/220
Anzahl der Elemente eines endlichen Körpers

Index: Vektorraum, Charakteristik eines Körpers, Primkörper, Dimension

Stoffeinheiten: 3/3/17 - 3/3/21 Dimension

F sei ein endlicher Körper; beweisen Sie:

Es existieren eine Primzahl p sowie eine natürliche Zahl $n \geq 1$, für die $|F| = p^n$ die Anzahl der Elemente von F ist.

Aufgabe 3/3/230
Ein Gruppenisomorphismus*

Index: Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, Kardinalzahl

Stoffeinheiten: 3/3/5 - 3/3/16 Basen von Vektorräumen

* Wir betrachten die abelsche Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ der von 0 verschiedenen komplexen Zahlen und die Untergruppe $S^1 := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$; Gruppenoperation ist in beiden Fällen die Multiplikation komplexer Zahlen. Beweisen Sie: Die Gruppen $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ und $(S^1, \cdot)$ sind isomorph.

Anleitung zum Beweis. Ein Isomorphismus $\mathbb{R} \underset{\mathbb{Q}}{\cong} \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lässt sich so wählen, dass $1 \in \mathbb{R}$ auf $(0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ abgebildet wird. Wir vergessen die Vektorraumstrukturen und erhalten ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\subseteq"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\
\{0\} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "\subseteq"] & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

Nach dem Homomorphieprinzip für Gruppen gibt es daher einen Isomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\{0\} \times \mathbb{Z}) \cong \mathbb{R} \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, und die additiven Gruppen in diesem Produkt sind isomorph zu den multiplikativen Gruppen S^1 bzw. $\mathbb{R}^{>0} \times S^1$ (wenden Sie den Homomorphiesatz auf $\mathbb{R} \to S^1$ mit $x \mapsto e^{2\pi i x}$ an bzw. verwenden Sie den Isomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0} := \{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$, der durch $x \mapsto e^x$ gegeben ist).

Aufgabe 3/3/240 (S: Varianten)
Hill-Ciphern (3)

Index: Vektorraum, lineare Abbildung, Hill-Ciphern, Entschlüsselung durch lineare Fortsetzung, lineare Fortsetzung

Stoffeinheiten: 3/3/29 Beispiel: Entschlüsselung von Hill - Ciphern

Eine Nachricht wird in der folgenden Weise verschlüsselt, indem zunächst Buchstaben auf Elemente des Primkörpers $\mathbb{F}_{29}$ abgebildet werden.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	-	,	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Die entstandenen Ziffern werden als Folge von Zahlenpaaren angeordnet (wobei ggf. am Ende der Nachricht ein Leerzeichen einzufügen ist, damit eine gerade Anzahl von Buchstaben entsteht).

Nun bezeichne A eine reguläre Matrix aus $\mathrm{M}(2;\mathbb{F}_{29})$; die zugehörige lineare Abbildung $\mathbb{F}_{29}^2 \to \mathbb{F}_{29}^2$ der Standardräume bildet die Paare der Folge auf neue Paare ab.

Als verschlüsselte Nachricht bezeichnen wir denjenigen Text, der der Folge der Bilder der Zahlenpaare entspricht.

HANS hat eine Nachricht unter Verwendung der Matrix $A \in \mathrm{M}(2,\mathbb{F}_{29})$ nach obiger Methode verschlüsselt; diese lautet nun

„CEIRWGBKBLHZ“.

Wir nehmen an, dass HANS in der Nachricht eine gerade Anzahl von Zeichen verwendet und der Brief mit dem Vornamen HANS endet.

Entschlüsseln Sie die Nachricht.

Lösung. Zunächst stellen wir die Zuordnung der Buchstaben zu den Elementen von $\mathbb{F}_{29}$ her und erhalten die folgende Liste von Paaren

$$(2,4),(8,17),(22,6),(1,10),(1,11),(7,25).$$

Wir haben die Matrix A zu finden. Nun sind „HA “ und „NS “ die letzten beiden Buchstabenpaare der Nachricht. Offensichtlich entsprechen diese gerade den Zahlenpaaren $w_1 = (7,0)$ und $w_2 = (13,-11)$. Durch Multiplikation ihrer Transponierten mit der Matrix A erhalten wir die letzten zwei Paare der obigen Liste, d.h. $u_1 = (1,11)$ $u_2 = (7,-4)$. Es folgt $A{\cdot}W = U$ mit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$A = U{\cdot}W^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation der Transponierten der Paare u mit der Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -14 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. durch ${}^t u \mapsto A^{-1} \cdot {}^t u$ erhalten wir die gesuchten Urbilder; das erste entsteht beispielsweise durch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mapsto A^{-1}{\cdot}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Resultate werden wiederum als Liste von Paaren aus $\mathbb{F}_{29}^2$ angeordnet; es ergibt sich

$$(6,4),(18,19),(4,17),(13,26),(7,0),(13,18).$$

Wir stellen gemäß der Tabelle die Zuordnung zu den Buchstaben her und erhalten die unverschlüsselte Nachricht

„GESTERN-HANS“.

Aufgabe 3/3/250 (S: Varianten)
Bild und Kern einer linearen Abbildung (1)

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Basis eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Wir betrachten die Standardvektorräume $V := \mathbb{R}^3$ und $W := \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie für die lineare Abbildung $g : V \to W$, die durch

$$g(x, y, z) := (y - 2z, x - y + 2z)$$

definiert wird, die Vektorräume $\ker(g)$ und $\operatorname{im}(g)$ durch Angabe jeweils einer Basis.

Ergebnis. $((0, 2, 1))$ ist eine Basis für $\ker(g)$.
$((0, 1), (1, -1))$ ist eine Basis für $\operatorname{im}(g)$.

Aufgabe 3/3/260 (S: Varianten)
Bild und Kern einer linearen Abbildung (2)

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Basis eines Vektorraumes, Basisergänzungssatz

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Wir untersuchen die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & -5 & 4 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{\mathbb{R}}(4, 5).$$

(1) Welchen Rang hat A?

(2) φ sei der Homomorphismus von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^4$, der durch A definiert wird. Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ und $\ker(\varphi)$.

(3) Ergänzen Sie die gefundene Basis von $\operatorname{im}(\varphi)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Ergebnis.

(1) Die Matrix A hat den Rang 3.

(2) Eine Basis für $\ker(\varphi)$ ist

$$((7, 1, -5, 0, 9), (4, -2, 4, 3, 0)),$$

eine Basis für $\operatorname{im}(\varphi)$ ergibt sich als

$$((-1, 2, 1, 1), (-1, -1, -5, 2), (2, -1, 4, 0)).$$

(3) Die zuvor gefundene Basis für $\operatorname{im}(\varphi)$ lässt sich folgendermaßen zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ergänzen:

$$((-1, 2, 1, 1), (-1, -1, -5, 2), (2, -1, 4, 0), (1, 0, 0, 0))$$

Aufgabe 3/3/270 (S: Varianten)
Bild und Kern eines Endomorphismus

Index: Vektorraum, Bild und Kern einer linearen Abbildung, Basis eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/3/22 - 3/3/26 Rechnen mit Basen

Im K-Vektorraum $V := \mathrm{M}(n; K)$ wählen wir eine Matrix A.

(1) Zeigen Sie, dass die durch $\Psi(X) := X \cdot A - A \cdot X$ definierte Abbildung $\Psi : V \to V$ linear ist.

(2) Wir wählen $K = \mathbb{R}$, $n = 2$ und
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Geben Sie eine Basis für $\ker(\Psi)$ an.

Lösung. Wir bestimmen das Resultat zu (2). Dazu schreiben wir die Bedingung
$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad X \cdot A - A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
als lineares Gleichungssystem für die Zahlen $x_1, \ldots, x_4$ auf und erhalten:
$$x_2 - x_3 = 0$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 0$$
$$-x_1 - 3x_3 + x_4 = 0$$
$$-x_2 + x_3 = 0$$
Das übliche Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme liefert nun die Menge aller Lösungen; insbesondere hat $\ker(\Psi)$ die Basis
$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Aufgabe 3/4/010 (S: Varianten)
Koordinaten und Übergangsmatrizen

Index: Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, Übergangsmatrix, Transformationsformel für Koordinaten, Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/4/1 - 3/4/8 Die Matrix einer linearen Abbildung

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die kanonische Basis $\mathcal{B} := (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ und das Tripel $\mathcal{B}' := (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ mit
$$\boldsymbol{b}_1 := (1, -1, 2), \ \boldsymbol{b}_2 := (-1, 2, 1), \ \boldsymbol{b}_3 := (1, -1, 0).$$
Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}'$ eine Basis ist und geben Sie beide Übergangsmatrizen zwischen den Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ an. Stellen Sie fest, welche Koordinaten der Vektor $\boldsymbol{x} = (2, 3, -1)$ bezüglich $\mathcal{B}'$ hat. Wie würden Sie diese Aufgabe lösen, wenn die betreffende Übergangsmatrix nicht gefragt wäre?

Ergebnis. Wir erhalten die Übergangsmatrizen
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{x}$ hat die Koordinaten $(-3, 5, 10)$ bezüglich $\mathcal{B}'$.

Aufgabe 3/4/020
Matrix der Transposition

Index: Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, Matrix einer linearen Abbildung

Stoffeinheiten: 3/4/1 - 3/4/8 Die Matrix einer linearen Abbildung

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $M := \mathrm{M}(2; \mathbb{R})$ der reellen 2×2-Matrizen werden mit E_{ij} diejenigen Matrizen bezeichnet, die an der (i, j)-ten Position den Wert 1 haben und an den übrigen den Wert 0.

(1) Beweisen Sie, dass die Matrizen $(\mathrm{E}_{11}, \mathrm{E}_{12}, \mathrm{E}_{21}, \mathrm{E}_{22})$ eine Basis von M bilden.

(2) Bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung $\varphi : M \to M$, die durch $\varphi(X) := {}^{t}X$ definiert ist.

Aufgabe 3/4/030 (S: Varianten)
Matrix einer linearen Abbildung, Basiswechsel

Index: Vektorraum, Matrix einer linearen Abbildung, Basiswechsel für lineare Abbildungen, Übergangsmatrix, Transformationsformel für Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/4/9 - 3/4/12 Variation der Basen

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, die durch
$$\varphi(x, y) := (-2x + 2y, y, y)$$
gegeben ist.

(1) Bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich der kanonischen Basen.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := ((2, 2), (-1, 1))$ Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ ist und dass $\mathcal{B}' := ((-2, 2, -1), (-1, -1, 2), (1, -1, 2))$ Basis für $\mathbb{R}^3$ ist.

(3) Bestimmen Sie die Übergangsmatrizen $\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2})$ und $\mathrm{M}_{\mathcal{K}',\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3})$, wobei $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ die kanonischen Basen bezeichnen.

(4) Bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

Ergebnis. Die gesuchten Matrizen sind

(1) $$\mathrm{M}_{\mathcal{K},\mathcal{K}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(3) $$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{K}}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_{\mathcal{K}',\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_{\mathbf{R}^3}) = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

(4) $$\mathrm{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3/4/040 (S: Varianten)
Matrix eines Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{R}^3$, Basiswechsel

Index: Vektorraum, Matrix einer linearen Abbildung, Basiswechsel für lineare Abbildungen, Übergangsmatrix, Transformationsformel für Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/4/1 - 3/4/8 Die Matrix einer linearen Abbildung

P_2 sei der Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 2 im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$. Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : V \to V$, die bezüglich der Basis $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ durch die folgende Matrix

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (2X+2, -X^2-X-2, -2X^2+2X-1)$ eine Basis von P_2 ist.

(2) Bestimmen Sie $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Ergebnis (2). Es ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3/4/050 (S: Varianten)
Matrix eines Endomorphismus eines Unterraumes von $\mathbb{R}[X]$, Basiswechsel

Index: Vektorraum, Matrix einer linearen Abbildung, Basiswechsel für lineare Abbildungen, Übergangsmatrix, Transformationsformel für Koordinaten

Stoffeinheiten: 3/4/1 - 3/4/8 Die Matrix einer linearen Abbildung

P_2 sei der Unterraum der Polynome vom Grad ≤ 2 im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ der Polynome in einer Unbestimmten über $\mathbb{R}$. Das Tripel $\mathcal{B} := (1, X, X^2)$ ist offensichtlich eine Basis von P_2. Nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung ist nun durch

$$1 \mapsto X^2\,, \quad X \mapsto 1\,, \quad X^2 \mapsto X$$

eine lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ definiert.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (-2X^2+2X+1, 2X^2+2, X^2+2X+2)$ eine Basis von P_2 ist.

(2) Bestimmen Sie $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ und $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$.

Ergebnis (2). Es ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -18 & 4 & -8 \\ -21 & 2 & -8 \\ 22 & 4 & 16 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3/5/010 (S: Varianten)
Duale Basen (1)

Index: Vektorraum, dualer Vektorraum, Basis eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

Stellen Sie fest, ob die Linearformen $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ eine Basis des dualen Vektorraumes des Standardraumes $\mathbb{R}^3$ bilden, wenn $\boldsymbol{u}(x,y,z) = 4x - 4y$, $\boldsymbol{v}(x,y,z) = -x - y + 3z$, $\boldsymbol{w}(x,y,z) = 3x - 3y + 2z$ ist.

Lösung. Es genügt zu prüfen, ob die Matrix A aus den (hier als Spalten angeordneten) Koordinaten der Vektoren $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ bezüglich der Basis $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*)$ die Eigenschaft $\operatorname{rang}(A) = 3$ hat. Dazu überführen wir A durch Zeilenoperationen in eine Stufenmatrix und erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ ist eine Basis des Raumes der Linearformen auf $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3/5/020 (S: Varianten)

Duale Basen (2)

Index: Vektorraum, dualer Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, duale Basis

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

Überprüfen Sie, dass die angegebenen Tupel von Vektoren Basen sind und bestimmen Sie die dualen Basen für

(1) $((-2,1,1),(-2,0,-2),(2,-1,0))$
im Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$, sowie für

(2) $((-1,-1),(0,1))$
im Standardvektorraum $\mathbb{F}_3^2$ über $\mathbb{F}_3$.

Ergebnis.

(1) Die duale Basis ist durch $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ gegeben, wobei

$$\boldsymbol{u}(x,y,z) = -x - 2y + z$$
$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = -\frac{1}{2}x - y$$
$$\boldsymbol{w}(x,y,z) = -x - 3y + z.$$

(2) Die duale Basis ist durch $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ gegeben, wobei

$$\boldsymbol{u}(x,y) = -x$$
$$\boldsymbol{v}(x,y) = -x + y.$$

Aufgabe 3/5/030

Linearformen und Unterräume

Index: Vektorraum, dualer Vektorraum, Basis eines Vektorraumes, duale Basis

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

V sei ein K-Vektorraum, U ein Unterraum, für den $t := \dim_K(V/U)$ endlich ist. Beweisen Sie: Es existieren Linearformen $\varphi_1, \ldots, \varphi_t$ auf V mit der Eigenschaft $U = \ker(\varphi_1) \cap \ldots \cap \ker(\varphi_t)$.

Aufgabe 3/5/040 (S: Varianten)
Gleichungen für Unterräume im $\mathbb{R}^3$

Index: Vektorraum, Unterraum, Gleichungssystem für einen Unterraum

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das den durch $(3, 3, 3)$ erzeugten Unterraum U des Standardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ als Lösungsmenge besitzt.

Lösung. Wir bezeichnen mit $f = a\boldsymbol{e}_1^* + b\boldsymbol{e}_2^* + c\boldsymbol{e}_3^*$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^3$. Dann ist durch die Bedingung

$$0 = < f\, , (3, 3, 3) > = 3a + 3b + 3c$$

eine lineare Gleichung gegeben, deren Lösungsraum durch

$$(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)$$

erzeugt wird. Wählen wir diese Tripel als Zeilen der Koeffizientenmatrix eines homogenen linearen Gleichungssystems für Zahlen x, y, z, so erhalten wir eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in U liegt (denn $(U^\perp)^\perp = U$). Das System

$$-x + z = 0$$
$$-x + y = 0$$

hat daher den angegebenen Unterraum U als Lösungsmenge.

Aufgabe 3/5/041 (S: Varianten)
Gleichungen für Unterräume im $\mathbb{R}^4$

Index: Vektorraum, Unterraum, Gleichungssystem für einen Unterraum

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

$U := \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w} \subseteq \mathbb{R}^4$ sei der Unterraum im 4-dimensionalen Standardvektorraum, der durch

$$\boldsymbol{v} = (-2, 3, 3, 1)\,,\ \boldsymbol{w} = (2, -2, 1, 0)$$

gegeben wird. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge U !

Lösung. W bezeichne den Raum der Linearformen auf $\mathbb{R}^4$, die auf U verschwinden. Dann gilt mit $W = U^\perp$

$$W = \{\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^* \mid\ <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> = 0\}\,.$$

Ist (x_1, x_2, x_3, x_4) das Koordinatenquadrupel eines Vektors $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich der dualen Basis $(\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \boldsymbol{e}_3^*, \boldsymbol{e}_4^*)$ der kanonischen, so ist die Bedingung $\boldsymbol{u} \in W$ äquivalent dazu, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Eine zeilenäquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix ergibt die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

aus der sich eine Basis $((-9,-8,2,0),(-1,-1,0,1))$ der Lösungsmenge ablesen lässt. Bezeichnet A die Matrix mit diesen Zeilen, so ist $Ax=0$ ein Gleichungssystem für $W^{\perp}$, wir erhalten daher

$$\begin{aligned} -9x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

als lineares Gleichungssystem mit der Nullstellenmenge U.

Aufgabe 3/5/042 (S: Varianten)
Gleichungen für Unterräume der Standardräume $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{C}^3$

Index: Vektorraum, Unterraum, Gleichungssystem für einen Unterraum

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

In Standardräumen $V=\mathbb{K}^n$ über dem Körper $\mathbb{K}$ wird nachfolgend jeweils ein Unterraum U durch Erzeugende vorgegeben. Finden Sie in beiden Fällen ein homogenes lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge genau der Unterraum U ist.

(1) $\mathbb{K}=\mathbb{R},\ V=\mathbb{R}^4$
$U=\mathrm{L}_{\mathbb{R}}((-1,0,0,0),(0,1,-1,-3),(2,1,-2,1))$

(2) $\mathbb{K}=\mathbb{C},\ V=\mathbb{C}^3$
$U=\mathrm{L}_{\mathbb{C}}(((i-2),(i+2),(i+2)),(-3,1,-(2i+3)))$

Ergebnis.

(1) $7x_2+4x_3+x_4=0$

(2) $-(i+7)x_1+(5i-9)x_2+4x_3=0$

Aufgabe 3/5/050 (S: Varianten)
Basis des Durchschnitts zweier Unterräume im $\mathbb{R}^4$ (1)

Index: Vektorraum, Unterraum, Gleichungssystem für einen Unterraum, Basis eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

Es sei U der Unterraum des reellen Standardvektorraumes $V=\mathbb{R}^4$, der durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ erzeugt wird, $\boldsymbol{v}_1=(-2,-2,0,0)$, $\boldsymbol{v}_2=(2,2,0,0)$, $\boldsymbol{v}_3=(-2,1,-2,1)$. Weiter wird durch

$$U'=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in V \mid -x_1+x_4=0\}$$

ein Unterraum von V gegeben. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraumes $U\cap U'$ von V.

Ergebnis. $U\cap U'$ ist Lösungsmenge des folgenden Systems:

$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + 3x_4 = 0 \\ &2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ &x_1 - x_4 = 0 \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir für $U \cap U'$ als Basis

$$((1, 4, -2, 1)).$$

Aufgabe 3/5/051 (S: Varianten)

Basis des Durchschnitts zweier Unterräume im $\mathbb{R}^4$ (2)

Index: Vektorraum, Unterraum, Gleichungssystem für einen Unterraum, Basis eines Vektorraumes, Dimension eines Vektorraumes

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

V bezeichne den reellen Standardraum $\mathbb{R}^4$.

(1) $V_1 \subseteq V$ sei der durch die Gleichung $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ definierte Unterraum. Geben Sie ein Erzeugendensystem für V_1 an.

(2) Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem für $V_1 \cap V_2$,

$$V_2 := \mathbb{R} \cdot (-2, -2, -2, 2) + \mathbb{R} \cdot (0, 0, -2, 0).$$

(3) Welche Dimensionen haben die Vektorräume V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ und $V_1 + V_2$?

Ergebnis.

(1) V_1 wird von den Vektoren aus

$$((-1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 0))$$

erzeugt.

(2) $V_1 \cap V_2$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$x_1 + x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

und

$$((0, 0, 1, 0))$$

eine Basis von $V_1 \cap V_2$.

(3) Es ist $\dim V_1 = 3$, $\dim V_2 = 2$, $\dim(V_1 \cap V_2) = 1$ und $\dim(V_1 + V_2) = 4$.

Aufgabe 3/5/060

Ein Vektorraum, der nicht zu seinem dualen isomorph ist

Index: Vektorraum, dualer Vektorraum, Isomorphismus von Vektorräumen

Stoffeinheiten: 3/5/1 - 3/5/11 Dualer Vektorraum und kanonische Paarung

V sei ein unendlichdimensionaler Vektorraum über dem zweielementigen Körper $\mathbb{F}_2$. Beweisen Sie, dass V nicht zu seinem dualen Vektorraum V^* isomorph ist.

Anmerkung. Die Behauptung ist im angegebenen Spezialfall leicht aus Mächtigkeitsaussagen über die Menge gewisser Teilmengen einer Menge zu gewinnen.

Anleitung zum Beweis. Wählen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von V und zeigen Sie, dass V zu $\mathcal{B}$ gleichmächtig ist, nicht aber V^*.

Aufgaben zum Kapitel 4

Aufgabe 4/2/009 (S: Varianten)
Erste Schritte mit Determinanten

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/1 - 4/2/9 Der Hauptsatz der Determinantentheorie

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -6 \\ -5 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung geeigneter Zeilentransformationen für A.

Lösung. $a_{11} = 0$, daher wird – wie beim gaußschen Algorithmus – zunächst die erste Zeile mit der zweiten vertauscht. Dabei ändert sich das Vorzeichen der Determinante, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -4 & -6 \\ -5 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun können Vielfache der ersten Zeile von den folgenden subtrahiert werden, so dass die Einträge a_{i1} verschwinden. Wir erhalten eine neue Matrix mit derselben Determinante, und entsprechend wird mit der zweiten Zeile verfahren, d.h.

$$-\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 15 & 12 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 19 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da wir ungern mit Brüchen rechnen, werden die 3. und 4. Zeile der zuletzt aufgetretenen Matrix mit 19 bzw. 3 multipliziert; entsprechend erhält die Determinante den Faktor $\frac{1}{19} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{57}$. Es ergibt sich

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 19 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{57} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 57 & 19 \\ 0 & 0 & 57 & 0 \end{pmatrix},$$

daher nach Subtraktion der dritten Zeile von der vierten

$$-\det(A) = \frac{1}{57} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 57 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{57} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 57 \cdot (-19) = -19.$$

Wir erhalten $\det(A) = 19$.

Das hier verwendete Verfahren zur Bestimmung der Determinante ist eine Variante des gaußschen Algorithmus. Es ist allgemein ausführbar und beruht auf den folgenden Eigenschaften.

(1) Bei Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen bleibt die Determinante einer Matrix unverändert.

(2) Bei Multiplikation einer Zeile der Matrix A mit einer Zahl c wird $\det(A)$ in $c{\cdot}\det(A)$ überführt.

(3) Durch Vertauschen zweier Zeilen der Matrix A wird $\det(A)$ in $-\det(A)$ überführt.

(4) Die Determinante einer (z.B. oberen) Dreiecksmatrix ist das Produkt der Einträge ihrer Hauptdiagonale.

Aufgabe 4/2/010
Rechenregeln für Determinanten (1)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/1 - 4/2/9 Der Hauptsatz der Determinantentheorie

K sei ein Körper. Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für die angegebenen Determinantenformeln.

(1) Sind $A, B \in \mathrm{M}(n; K)$, so ist $|A + B| = |A| + |B|$.

(2) Ist $A \in \mathrm{M}(n; K)$, $\alpha \in K$, so gilt $|\alpha A| = \alpha|A|$.

(3) Ist $A \in \mathrm{M}(n; K)$, $\alpha \in K$, so gilt $|\alpha A| = \alpha^n|A|$.

Aufgabe 4/2/025
Rechenregeln für Determinanten (2)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/1 - 4/2/9 Der Hauptsatz der Determinantentheorie

Wir wählen Matrizen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}(2; K)$.

(1) Drücken Sie die Determinante $\det(A + B)$ als Summe von Determinanten aus, in denen die Zahlen a_{ij} (keine Summen!) als Einträge auftreten.

(2) Sehen Sie eine Verallgemeinerung für den Fall $A, B \in \mathrm{M}(n; K)$ mit $n > 2$?

Aufgabe 4/2/030 (S: Varianten)
Bestimmung von Determinanten (1)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen A, B und C.

(1) $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung.

(1) Wir erhalten
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4.$$

(2) Es ist
$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

(3) Die Determinante ergibt sich als
$$\det(C) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
(Die Spalten 1 und 2 sind proportional.)

Aufgabe 4/2/032 (S: Varianten)

Bestimmung von Determinanten (2)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

(1) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{F}_5$ und

(2) $$B = \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{F}_2$.

Lösung.

(1) Es ist

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

(2) Wir erhalten

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&1 \\ 0&1&1&1&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&1&0&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&1&0&0 \\ 0&0&1&1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&1&0&1 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&1&1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&1&0 \\ 0&1&1 \\ 0&0&1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1&1 \\ 0&1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aufgabe 4/2/034 (S: Varianten)
Bestimmung von Determinanten (3)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden komplexen Matrizen:

(1) $$A = \begin{pmatrix} (i-2) & 1 & (2i+1) \\ -2 & (2i-1) & 1 \\ 2 & (i+2) & 2 \end{pmatrix}$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 2i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung.

(1) Wir erhalten
$$\det(A) = \begin{vmatrix} (i-2) & 1 & (2i+1) \\ -2 & (2i-1) & 1 \\ 2 & (i+2) & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (5i-2) & (2i-1) & 6 \\ 7 & (i+2) & -(5i-2) \end{vmatrix}$$
$$= -\begin{vmatrix} (5i-2) & 6 \\ 7 & -(5i-2) \end{vmatrix} = -(20i-21).$$

(2) Es ist $\det(B) = (5i-2)$.

Aufgabe 4/2/040 (S: Varianten)
Determinanten mit Parametern (1)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Bestimmen Sie für alle $t \in \mathbb{R}$ die Determinante der Matrix
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & t & 3t & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2t & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Es ist
$$\det(A(t)) = \begin{vmatrix} 0 & t & 3t & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2t & t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & t & 3t \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2t & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2t & t & 4t \\ 0 & -1 & 0 \\ 4t-2 & 2t & 3t \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2t & 4t \\ 4t-2 & 3t \end{vmatrix} = 10t^2 - 8t.$$

Aufgabe 4/2/050 (S: Varianten)

Determinanten mit Parametern (2)

Index: Determinante eines Endomorphismus, multilineare Abbildung, Automorphismus

Stoffeinheiten: 4/2/21 - 4/2/25 Die Determinante eines Endomorphismus

Welcher der folgenden Endomorphismen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist ein Automorphismus?

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, -x_2, 2x_1 + 2x_2 + x_3)$.

(2) $f_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, -x_1 - x_2 + 3x_3, tx_3 + 3x_1 + 3x_2)$
(für eine gegebene Zahl $t \in \mathbb{R}$).

Lösung.

(1) Die Matrix von f ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

sie hat die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Daher ist f ein Automorphismus.

(2) Die Matrix von f_t ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix},$$

für ihre Determinante ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & t \end{vmatrix} = -t - 9.$$

Daher ist f_t genau dann ein Automorphismus, wenn $t \neq -9$.

Aufgabe 4/2/090
Determinanten und Kettenbrüche

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, Entwicklung einer Determinante nach der i-ten Spalte, Entwicklung einer Determinante nach der i-ten Zeile

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

K sei ein Körper. Für $a_1, \ldots, a_n \in K$ setzen wir

$$(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & a_n \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie:

(1) $(a_1, \ldots, a_n) = a_n \cdot (a_1, \ldots, a_{n-1}) + (a_1, \ldots, a_{n-2})$

(2) $\dfrac{(a_1, \ldots, a_n)}{(a_2, \ldots, a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$

Aufgabe 4/2/100 (S: Varianten)
Determinanten mit Parametern (3)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, Rangbestimmung mit Unterdeterminanten

Stoffeinheiten: 4/2/19 - 4/2/20 Rangbestimmung mit Unterdeterminanten

Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix A in Abhängigkeit von den Parametern s, t aus dem Körper K.

$$A = \begin{pmatrix} t - 7s & 3t + 5s & -2t + 8s \\ 6s & -4t - 5s & -3s \\ -t + 5s & 3t - 8s & 2t - 7s \end{pmatrix}$$

Lösung. Eine prinzipielle Möglichkeit zur Behandlung solcher Aufgaben ist durch das Determinantenkriterium gegeben; dazu sind die Nullstellen aller Determinanten quadratischer Teilmatrizen zu untersuchen. Wir gehen hier anders vor, dabei werden die folgenden Fälle unterschieden.

(1) $s = t = 0$, dann ist $A = 0$ und folglich $\mathrm{rang}(A) = 0$.

(2) $s = 0$ und $t \neq 0$; dann ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} t & 3t & -2t \\ 0 & -4t & 0 \\ -t & 3t & 2t \end{pmatrix}.$$

Wegen $t \neq 0$ ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\frac{1}{t} \cdot A)$,

$$\frac{1}{t} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{rang}(A) = 2$.

(3) $s \neq 0$, so ist $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\frac{1}{s} \cdot A)$. Setzen wir $u = \frac{t}{s}$, so ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} u-7 & 3u+5 & -2u+8 \\ 6 & -4u-5 & -3 \\ -u+5 & 3u-8 & 2u-7 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Determinante

$$\begin{vmatrix} u-7 & 3u+5 & -2u+8 \\ 6 & -4u-5 & -3 \\ -u+5 & 3u-8 & 2u-7 \end{vmatrix} = -42u^2 + 168u - 126$$

und erhalten für $u \neq 1, 3$ (i.e. $t \neq s, 3s$) einen von 0 verschiedenen Wert, also $\operatorname{rang}(A) = 3$. Für $u = 1$ ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 6 \\ 6 & -9 & -3 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix},$$

also $\operatorname{rang}(A) = 2$. Für $u = 3$ ist

$$\frac{1}{s} \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & 14 & 2 \\ 6 & -17 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

folglich $\operatorname{rang}(A) = 2$.

Aufgabe 4/2/110 (S: Varianten)

Kofaktoren von Determinanten

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, Kofaktoren einer quadratischen Matrix

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Bestimmen Sie den Kofaktor A_{23} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an der Position $(2, 3)$.

Lösung.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -13.$$

Aufgabe 4/2/120 (S: Varianten)
Die adjungierte Matrix (1)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, Kofaktoren einer quadratischen Matrix, adjungierte Matrix, inverse Matrix (Determinantenformel)

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Berechnen Sie $\operatorname{adj}(A)$ und $\det(A)$.

(2) Geben Sie die inverse Matrix für A an.

Lösung.

Es ist $\operatorname{adj}(A) = {}^{\mathrm{t}}(A_{ij})$ mit

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

also

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -10 & 6 & -8 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jetzt berechnen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Für die inverse Matrix ergibt sich

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -10 & 6 & -8 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4/2/130
Rechenregeln für Determinanten (3)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, Kofaktoren einer quadratischen Matrix, adjungierte Matrix, inverse Matrix (Determinantenformel)

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Beweisen Sie die folgenden Formeln für die Adjungierte einer Matrix $A \in \mathrm{M}(n; K)$.

(1) $\det(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

(2) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = A$, falls $n = 2$.

(3) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(A)^{n-2} \cdot A$, falls $n > 2$.

Aufgabe 4/2/140 (S: Varianten)
Die adjungierte Matrix (2)

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, Kofaktoren einer quadratischen Matrix, adjungierte Matrix, inverse Matrix (Determinantenformel)

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Berechnen Sie unter Verwendung der adjungierten Matrix die Inverse zu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{Q}).$$

Lösung. Es ist einfach zu sehen, dass

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -27.$$

Zur Berechnung der Adjungierten sind nur zwei Arten von Minoren zu bestimmen, nämlich

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -9.$$

Wir erhalten daher

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \end{pmatrix},$$

und für die Inverse ergibt sich

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4/2/150 (S: Varianten)

Cramersche Regel

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, cramersche Regel

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Lösen Sie unter Verwendung von Determinanten die folgenden Gleichungssysteme.

(1) $$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} x + y = -2y + 2z + 1 \\ -x - z = -2y + z - 1 \\ y - z = -y + 2z \end{cases}$$

Lösung.

(1) Es ist

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

Daher folgt

$$x = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{5}{4}.$$

Entsprechend gilt

$$y = \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

(2) Wir schreiben das System in der üblichen Form:

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ -x + 2y - 2z &= -1 \\ 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

Für die Determinante der Koeffizientenmatrix ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Also ist

$$x = -\frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \frac{7}{7} = 1,$$

$$y = -\frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{0}{7} = 0,$$

$$z = -\frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{0}{7} = 0,$$

womit wir die gesuchte Lösung (x, y, z) erhalten haben.

Aufgabe 4/2/180 (S: Varianten)

Endomorphismen und Determinanten (1)

Index: Determinante eines Endomorphismus, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/21 - 4/2/25 Die Determinante eines Endomorphismus

Nachfolgend sind lineare Endomorphismen endlichdimensionaler Vektorräume angegeben. Bestimmen Sie in jedem Fall die Determinante.

(1) $\varphi : K^n \to K^n$, wobei $\varphi(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$ ist und $n \geq 2$,

(2) $\varphi : V \to V$, wobei $\varphi(v) := 2v$ ist,

(3) $K = \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) := (x_3, x_1 + x_3, -x_2 + x_3).$$

Lösung.

(1) Der Endomorphismus hat bezüglich der Standardbasis die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist 1 für $n = 2$ und 0 sonst.

(2) Die Matrix des Endomorphismus bezüglich der Standardbasis ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix},$$

seine Determinante daher $2^{\dim(V)}$.

(3) Die Matrix des Endomorphismus φ bezüglich der Standardbasis ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

denn ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{S}_j(A) = \varphi(\boldsymbol{e}_j)$. Es folgt

$$\det(\varphi) = \det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Aufgabe 4/2/190 (S: Varianten)

Endomorphismen und Determinanten (2)

Index: Determinante eines Endomorphismus, multilineare Abbildung

Stoffeinheiten: 4/2/21 - 4/2/25 Die Determinante eines Endomorphismus

Wir untersuchen Determinanten von Endomorphismen eines endlichdimensionalen K-Vektorraumes V.

(1) Es sei $V = \mathbb{R}^3$ und φ definiert durch

$$\varphi(x, y, z) := (x, x + y - z, x + y).$$

Bestimmen Sie $\det(\varphi)$.

(2) U und W seien Unterräume, für die $V = U \oplus W$ gilt. Durch die folgenden Vorschriften sind auf eindeutige Weise lineare Endomorphismen von V definiert.

$$\psi_1(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W$$

$$\psi_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) := 2\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \in U,\ \boldsymbol{y} \in W$$

Bestimmen Sie die Determinanten von ψ_1 und ψ_2.

(3) Zeigen Sie, dass für jede Zahl $\alpha \in K$ ein Endomorphismus des Vektorraumes $V \neq \mathbf{0}$ existiert, dessen Determinante α ist.

Lösung. Wir führen die Rechnungen zu (1) und (2) aus.

(1) Die Matrix des Endomorphismus bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ ist

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher folgt

$$\det(\varphi) = \det\left(\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

(2) Wir wählen Basen $\mathcal{B}_U = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ in U und $\mathcal{B}_W = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ in W, dann ist $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_s\}$ eine Basis in V. Bezüglich $\mathcal{B}$ haben ψ_1 bzw. ψ_2 die Matrizen

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\psi_1) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\psi_2) = \begin{pmatrix} 2 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & -3 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & -3 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\det(\psi_1) = 0$ und $\det(\psi_2) = 2^r \cdot (-3)^s$.

Aufgabe 4/2/200 (S: Varianten)

Komplexität der Bestimmung von Determinanten

Index: Determinante einer Matrix, multilineare Abbildung, leibnizsche Formel, laplacescher Entwicklungssatz

Stoffeinheiten: 4/2/10 - 4/2/18 Rechnen mit Determinanten

Wir betrachten die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & 4 \\ -4 & -5 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & 3 \\ -5 & -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie jede der folgenden Methoden zur Berechnung wenigstens einer der Determinanten $\det(A)$, $\det(B)$.

(1) Gaußscher Algorithmus unter Berücksichtigung der Anzahl der auftretenden Permutationen von Zeilen.

(2) Laplacescher Entwicklungssatz.

(3) Leibnizsche Formel.

Welches Verfahren ist das einfachste, welches das schnellste?

Lösung.

(1) Mit dem gaußschen Algorithmus erhalten wir eine zu A zeilenäquivalente Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{59}{5} & \frac{41}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{474}{59} \end{pmatrix}.$$
$\det(A)$ ist bis auf das Vorzeichen Produkt der Diagonaleinträge dieser Matrix. Die Anzahl der bei den Umformungen aufgetretenen Zeilenpermutationen ist gerade. Daher folgt $\det(A) = 474$. Entsprechend ergibt sich $\det(B) = -198$.

(2) Wir entwickeln A nach der ersten Zeile und erhalten
$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{(1+1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 4 \\ -5 & -4 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} + (-5) \cdot (-1)^{(1+3)} \cdot$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -5 & 4 & 4 \\ -4 & -5 & -4 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{(1+4)} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & -3 \\ -4 & -5 & -4 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot 138 + 1 \cdot (-32) + (-2) \cdot (-182) + (-1) \cdot (-4) = 474.$$

Für die zweite Matrix lässt sich $\det(B)$ durch Entwicklung nach der dritten Spalte schnell bestimmen; es ist
$$\det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & 3 \\ -5 & -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$
$$= -9 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -198.$$

(3) Die Leibniz-Formel ist schwer anzuwenden und die Rechnung zeitaufwändig. In unserem Fall müssen wir 24 Terme bestimmen (es gibt $4! = 24$ Permutationen von 4 Indizes). Die Entwicklung für A ist

$\det(A) =$
$$(1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot(-2)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot(-2)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot(-2)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot(-2)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot(-1)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot(-2)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (-1\cdot(-2)\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4)) + (1\cdot1\cdot2\cdot(-5)\cdot(-4))$$
$$= 474.$$

Bemerkung. Wir kennen kein allgemeines Verfahren, mit dem sich Determinanten optimal berechnen lassen. Sinnvoll ist eine Kombination verschiedener Methoden.
In der technischen Ausführung auf dem Computer ist die Zahl der erforderlichen Additionen (Subtraktionen) von eher geringer Bedeutung, aufwändig dagegen das Multiplizieren.
Mit dem gaußschen Algorithmus ergibt sich ein Verfahren, bei dem die Determinante einer Matrix vom Typ (n, n) mit $\mathrm{O}(n^3)$ Multiplikationen bestimmt werden kann.
Das Rechnen mit der Leibniz-Formel ist wesentlich komplexer (wir brauchen $\mathrm{O}((n-1)\cdot n!)$ Multiplikationen, falls die Zwischenergebnisse nicht gespeichert werden).

Hier folgt eine eher „menschliche“ Lösung.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -5 & 4 & -3 & 4 \\ -4 & -5 & -4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 6 & -4 \\ -5 & -1 & -13 & 9 \\ -4 & -9 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 6 & -4 \\ -1 & -13 & 9 \\ -9 & -12 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & -59 & 41 \\ -1 & 0 & 0 \\ -9 & 105 & -81 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -59 & 41 \\ 105 & -81 \end{vmatrix} = 474.$$

Im zweiten Fall erhalten wir

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ -5 & -4 & -3 & 3 \\ -5 & -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -9 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -198.$$

Aufgabe 4/3/010 (S: Varianten)

Beispiele für Bilinearformen (1)

Index: multilineare Abbildung, Bilinearform

Stoffeinheiten: 4/3/1 - 4/3/4 Die Matrix einer Bilinearform

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ und $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ bezeichnen Vektoren aus $\mathbb{R}^2$. Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind Bilinearformen?

(1) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := x_2 y_1 - x_2 y_2$
(2) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 + 1$
(3) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2$
(4) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 4x_1 + 8x_2 + 5y_1 - 4y_2$
(5) $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := 2x_1 x_2 y_1 + 2x_1 y_1 + x_2^2 y_2 + x_2 y_2$

Ergebnis.

(1) f ist Bilinearform.
(2) f ist keine Bilinearform.
(3) f ist keine Bilinearform.
(4) f ist keine Bilinearform.
(5) f ist keine Bilinearform.

Aufgabe 4/3/020
Beispiele für Bilinearformen (2)
Index: multilineare Abbildung, Bilinearform, Determinante einer Matrix
Stoffeinheiten: 4/3/1 - 4/3/4 Die Matrix einer Bilinearform

Wir untersuchen Abbildungen $V \times V \to K$ für K-Vektorräume V. Entscheiden Sie, in welchem Fall Bilinearität vorliegt.

(1) $f(x, y) := x \cdot {}^{\mathrm{t}}y$ für den Standardvektorraum $V = K^n$,
(2) $g(A, B) := \mathrm{tr}(A \cdot B)$ für den K-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n; K)$,
(3) $h(A, B) := \det(A \cdot B)$ für den K-Vektorraum $V = \mathrm{M}(n; K)$.

Aufgabe 4/3/030 (S: Varianten)
Bilinearformen und Basiswechsel
Index: multilineare Abbildung, Bilinearform, Basiswechsel für Bilinearformen
Stoffeinheiten: 4/3/1 - 4/3/4 Die Matrix einer Bilinearform

f sei die Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$, die durch

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3x_1 y_2 - 2x_2 y_1 - 2x_2 y_2$$

definiert wird.

(1) Geben Sie die Matrix $A = \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B} = ((2, -1), (-2, -1))$ an.
(2) Geben Sie die Matrix $B = \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ von f bezüglich der Basis $\mathcal{B}' = ((-1, 1), (-1, -2))$ an.
(3) Geben Sie die Übergangsmatrix $U := \mathrm{U}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$ an und überzeugen Sie sich davon, dass $B = {}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U$ ist.

Lösung.

(1) Offensichtlich ist

$$f((2,-1),(2,-1)) = -4$$
$$f((2,-1),(-2,-1)) = -12$$
$$f((-2,-1),(2,-1)) = 8$$
$$f((-2,-1),(-2,-1)) = 0\,;$$

wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Entsprechend finden wir

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

(3) Die Übergangsmatrix ist

$$\mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4/3/040 (S: Varianten)

Die symmetrische Matrix einer quadratischen Form

Index: quadratische Form, symmetrische Matrix einer quadratischen Form

Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

Geben Sie für jede der nachfolgend aufgeführten quadratischen Formen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die zugehörige symmetrische Matrix an.

(1) $f(x,y) = 2x^2 - 4xy - y^2$

(2) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$

(3) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4yz + z^2$

(4) $f(x,y,z) = -xy - 3xz - y^2 + z^2$

Ergebnis.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4/3/050 (S: Varianten)

Diagonalisierung, Rang und Signatur einer quadratischen Form

Index: quadratische Form, symmetrische Bilinearform, Diagonalisierung, quadratische Ergänzung, Rang einer quadratischen Form, Signatur einer symmetrischen Bilinearform

Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

Geben Sie für jede der folgenden reellen Matrizen A eine invertierbare Matrix U an, für die ${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U$ diagonal ist.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Welchen Rang und welche Signatur haben die entsprechenden quadratischen Formen?

Ergebnis.

(1) $U = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Es folgt $\mathrm{rang}(A) = 2$, und A hat die Signatur 0.

(2) $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,

${}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{pmatrix}$,

$\mathrm{rang}(A) = 3$ und A hat die Signatur -1.

(3) $U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$ {}^{\mathrm{t}}U \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, $$

$\operatorname{rang}(A) = 4$ und A hat die Signatur 0.

Aufgabe 4/3/060 (S: Varianten)

Diagonalisierung einer quadratischen Form

Index: quadratische Form, symmetrische Matrix einer quadratischen Form, symmetrische Diagonalform, Diagonalisierung

Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

Es sei $A \in M(n; \mathbb{R})$, sowie $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die durch $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x} \cdot A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ definierte quadratische Form.

(1) Zeigen Sie, dass der Wert von $\boldsymbol{q}$ nur von $A + {}^{\mathrm{t}}A$ abhängt. Folgern Sie, dass A stets durch eine eindeutig bestimmte symmetrische Matrix B ersetzt werden kann, ohne dass sich dabei die Abbildung $\boldsymbol{q}$ ändert.

(2) Es sei $n = 3$,

$$ \boldsymbol{q}(x_1, x_2, x_3) := -3x_1^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2. $$

Bestimmen Sie die gemäß (1) existierende symmetrische Matrix B mit der Eigenschaft $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot B \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}$ für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

(3) Geben Sie eine Basis des Standardraumes $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich der die unter (2) definierte Form $\boldsymbol{q}$ eine Diagonalmatrix besitzt.

Ergebnis.

(2)
$$ B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} $$

(3) Wir verwenden den symmetrischen gaußschen Algorithmus oder (ganz naiv) die Methode der quadratischen Ergänzung. So ergibt sich eine Basis

$$ \mathcal{B} = ((1, 0, 0), (-1, -1, 0), (2, 0, -3)), $$

bezüglich der $\boldsymbol{q}$ die Diagonalmatrix

$$ \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{q}) = \operatorname{diag}(-3, 1, 30) $$

hat, d.h. $\boldsymbol{q}$ ist äquivalent zur quadratischen Form

$$ -3x_1^2 + x_2^2 + 30x_3^2\,. $$

Wer Lust dazu hat, kann durch Multiplikation der Basisvektoren mit Konstanten nun noch erreichen, dass die quadratische Form in die äquivalente Gestalt $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ transformiert wird.

Aufgabe 4/3/070 (S: Varianten)

Rechenaufgaben zur positiven Definitheit

Index: quadratische Form, symmetrische Matrix einer quadratischen Form, positive Definitheit, Determinantenkriterium

Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

Stellen Sie fest, welche der folgenden quadratischen Formen $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ positiv definit ist.

(1) $\boldsymbol{q}(x,y,z) = 4xy - 4xz - y^2 - 2yz + z^2$
(2) $\boldsymbol{q}(x,y,z) = x^2 + 4xy + 4yz + 2z^2$
(3) $\boldsymbol{q}(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2yz + 2z^2$

Lösung. Zunächst werden die zugehörigen symmetrischen Matrizen bestimmt. Wir erhalten in der Reihenfolge der angegebenen Fälle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun wird geprüft, ob alle Hauptminoren positiv definit sind. Sobald ein Hauptminor ≤ 0 gefunden wird, ist $\boldsymbol{q}$ nicht positiv definit und die jeweilige Rechnung kann abgebrochen werden.

(1) Für die Matrix A ergibt sich

$$|\,0\,| = 0,$$

$\boldsymbol{q}$ ist daher nicht positiv definit.

(2) Wir erhalten für die Matrix B

$$|\,1\,| = 1,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4,$$

also ist $\boldsymbol{q}$ nicht positiv definit.

(3) Entsprechend ergibt sich für C

$$|\,1\,| = 1,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

d.h. $\boldsymbol{q}$ ist positiv definit.

Aufgabe 4/3/080
Notwendige Bedingung für positive Definitheit

Index: quadratische Form, positive definite quadratische Form

Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

Es sei $\boldsymbol{q} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\boldsymbol{q}(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i\leq j} a_{ij}x_ix_j$ eine quadratische Form.

(1) Zeigen Sie: Falls $\boldsymbol{q}$ positiv definit ist, so gilt $a_{ii} > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

(2) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Bedingung unter (1) für die positive Definitheit von $\boldsymbol{q}$ nicht hinreichend ist.

Aufgabe 4/3/110
Ein Gegenbeispiel zur positiven Definitheit

Index: quadratische Form, positive definite quadratische Form

Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

Geben sie einen reellen Vektorraum V und eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ an sowie eine quadratische Form $\boldsymbol{q} : V \to \mathbb{R}$, für die beide der folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

a) $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{b}_i) > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) $\boldsymbol{q}$ ist nicht positiv definit.

Aufgabe 4/3/120
Quadratische Form eines Graphen*

Index: quadratische Form, negativ definite quadratische Form, Determinantenkriterium für positive Definitheit

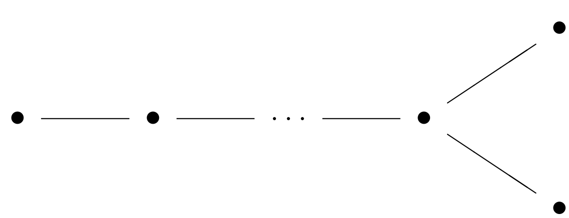
Stoffeinheiten: 4/3/5 - 4/3/16 Quadratische Formen

* Ein Graph $\Gamma := (\mathcal{E}, \mathcal{K})$ besteht aus einer (hier endlichen) Menge $\mathcal{E}$ von *Ecken* und einer Menge $\mathcal{K}$ zweielementiger Teilmengen von $\mathcal{E}$, den *Kanten*. Wir zeichnen ihn durch Angabe von Punkten (Ecken) und Verbindungslinien von Punkten (Kanten). Verwenden wir die Notation $\mathcal{E} = \{1, \ldots, n\}$, so lässt sich Γ eine quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ auf $\mathbb{R}^n$ zuordnen durch die Vorschrift

$$\boldsymbol{q}_\Gamma(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} a_{ij} x_i x_j$$

mit $a_{ii} := -2$ und $a_{ij} = a_{ji} := 1$ falls $\{i, j\} \in \mathcal{K}$; anderenfalls setzen wir $a_{ij} = a_{ji} := 0$.

(1) Zeigen Sie, dass für die folgenden beiden Graphen mit jeweils n Ecken die quadratische Form $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist (wobei im ersten Fall $n \geq 1$ und im zweiten $n \geq 4$ zu wählen ist).



(2) Γ heißt zusammenhängend, falls sich zwei beliebige Ecken durch eine Folge von Kanten verbinden lassen.
Finden Sie alle zusammenhängenden Graphen Γ, für die $\boldsymbol{q}_\Gamma$ negativ definit ist.

Aufgabe 4/3/130 (S: Varianten)
Bestimmung symplektischer Basen

Index: alternierende Bilinearform, symplektische Basis

Stoffeinheiten: 4/3/17 - 4/3/20 Alternierende Bilinearformen

Bestimmen Sie für die nichtausgeartete alternierende Bilinearform $\boldsymbol{b}$ auf dem Standardraum $\mathbb{R}^4$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert wird, eine symplektische Basis.

Lösung. Definitionsgemäß ist $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot A\cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y}$ die durch A definierte alternierende Form. Unter den Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_4$ der kanonischen Basis suchen wir zunächst ein Paar, für das $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) \neq 0$ ist. Offenbar ist dies bereits für $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = 4$ erfüllt. Wir setzen

$$\boldsymbol{b}_1 := \frac{1}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)}\cdot \boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{4}(1,0,0,0),$$
$$\boldsymbol{b}_2 := \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0).$$

Es ergibt sich eine Basis $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ des von $\boldsymbol{e}_1$ und $\boldsymbol{e}_2$ erzeugten Unterraumes, bezüglich der die Einschränkung von $\boldsymbol{b}$ die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Nun wird als Komplementärraum zu $\mathbb{R}\boldsymbol{b}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{b}_2$ der Unterraum W aller Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$ bestimmt, für die $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{x}) = 0$ ist. W ist in unserem Fall die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems, dessen Koeffizientenmatrix aus den ersten beiden Zeilen von A besteht. Wir erhalten als Erzeugendensystem die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (-3,2,0,4),$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (-1,-2,4,0).$$

Entsprechend wird nun

$$\boldsymbol{b}_3 := \frac{1}{\boldsymbol{b}(\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)}\cdot \boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{16}(3,-2,0,-4),$$
$$\boldsymbol{b}_4 := \boldsymbol{v}_4 = (-1,-2,4,0)$$

gesetzt. Wir erhalten eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_3,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_4)$, für die $\boldsymbol{b}$ die Matrix

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{E}_2 \\ -\mathrm{E}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, d.h. $\mathcal{B}$ ist symplektisch.

Aufgabe 4/4/010 (S: Varianten)
Rechnen mit Basen von Tensorprodukten

Index: Tensorprodukt, Rechenregeln für Tensoren, Basis eines Tensorprodukts

Stoffeinheiten: 4/4/1 - 4/4/8 Das klassifizierende Objekt bilinearer Abbildungen

$V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}^3$ bezeichnen die reellen Standardräume mit den kanonischen Basen $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$, bzw. $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{e}'_1,\boldsymbol{e}'_2,\boldsymbol{e}'_3)$. Zerlegen Sie die Tensoren $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} \in V \otimes_{\mathbb{R}} W$ in Vielfachensummen der Basisvektoren aus $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}'$, wobei

(1) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}'_2,$

(2) $\boldsymbol{v} = (-3,-2),\ \boldsymbol{w} = (0,2,-2).$

Ergebnis.

(1) $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} = 3\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}'_2 + 3\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}'_1 + \boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}'_2.$

(2) Es ist

$$\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 \text{ und } \boldsymbol{w} = 2\boldsymbol{e}'_2 - 2\boldsymbol{e}'_3,$$

wir erhalten folglich

$$\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w} = -6\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}'_2 + 6\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}'_3 - 4\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}'_2 + 4\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}'_3\,.$$

Aufgabe 4/4/020
Eigenschaften des Tensorprodukts (1)

Index: Tensorprodukt, Rechenregeln für Tensoren, Basis eines Tensorprodukts, Dimension eines Tensorprodukts

Stoffeinheiten: 4/4/1 - 4/4/8 Das klassifizierende Objekt bilinearer Abbildungen

Zeigen Sie: Sind V, W und P Vektorräume, so existieren Isomorphismen (1) bzw. (2), die durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind.

(1) $V\otimes_K W \cong W\otimes_K V,\quad \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\mapsto\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}$

(2) $(V\otimes_K W)\otimes_K P \cong V\otimes_K (W\otimes_K P),\quad (\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})\otimes\boldsymbol{p}\mapsto\boldsymbol{v}\otimes(\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{p})$

Aufgabe 4/4/030
Eigenschaften des Tensorprodukts (2)

Index: Tensorprodukt, Rechenregeln für Tensoren, Basis eines Tensorprodukts, Dimension eines Tensorprodukts

Stoffeinheiten: 4/4/1 - 4/4/8 Das klassifizierende Objekt bilinearer Abbildungen

Zeigen Sie: Sind V, W und P Vektorräume, so existieren Isomorphismen (1) bzw. (2), die durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt sind.

(1) $(V\bigoplus W)\otimes_K P \cong (V\otimes_K P)\bigoplus(W\otimes_K P),\quad (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\otimes\boldsymbol{p}\mapsto(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{p},\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{p})$

(2) $\mathrm{Hom}_K(V,\mathrm{Hom}_K(W,P)) \cong \mathrm{Hom}(V\otimes_K W,P);$
dabei wird $\psi\in\mathrm{Hom}_K(V,\mathrm{Hom}_K(W,P))$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $V\otimes_K W\to P$ zugeordnet, die mittels der Tensorabbildung der bilinearen Abbildung $V\times W\to P,\ (\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\mapsto(\psi(\boldsymbol{v}))(\boldsymbol{w})$ entspricht.

Aufgabe 4/4/040
Eigenschaften des Tensorprodukts (3)

Index: Tensorprodukt, Rechenregeln für Tensoren, Basis eines Tensorprodukts, Dimension eines Tensorprodukts, Bifunktorialität des Tensorprodukts

Stoffeinheiten: 4/4/1 - 4/4/8 Das klassifizierende Objekt bilinearer Abbildungen

Zeigen Sie: Sind V, W, P und Q Vektorräume sowie $\varphi_1 : V \to W$, $\varphi_2 : V \to W$ und $\psi : P \to Q$ lineare Abbildungen, dann gilt

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes_K \psi = \varphi_1 \otimes_K \psi + \varphi_2 \otimes_K \psi.$$

Aufgabe 4/4/060 (S: Varianten)
Das Kroneckerprodukt (1)

Index: Kroneckerprodukt, Tensorprodukt von Matrizen

Stoffeinheiten: 4/4/11 - 4/4/12 Kroneckerprodukt von Matrizen

Bestimmen Sie das Kroneckerprodukt $A \otimes B$ der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis.

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 4 & 6 \\ -4 & -6 & 4 & 6 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4/4/070 (S: Varianten)
Das Kroneckerprodukt (2)

Index: Kroneckerprodukt, Tensorprodukt von Matrizen, Basis eines Tensorprodukts

Stoffeinheiten: 4/4/11 - 4/4/12 Kroneckerprodukt von Matrizen

Es seien $\varphi : V \to W$ und $\varphi' : V' \to W'$ lineare Abbildungen der reellen Standardräume $V = \mathbb{R}^2$, $V' = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$ bzw. $W' = \mathbb{R}^2$. Die Homomorphismen φ, φ' werden durch

$$\varphi(x, y) = (2y, x + y)\,,$$
$$\varphi'(x, y, z) = (2y + 2z, 2x - y)$$

definiert. Geben Sie die Tensorprodukte der Standardbasen für $V \otimes V'$ sowie $W \otimes W'$ an und bestimmen Sie die Matrix der linearen Abbildung $\varphi \otimes \varphi' : V \otimes V' \to W \otimes W'$ bezüglich dieser Basen.

Ergebnis. Mit $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$, $(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2)$ bzw. $(\boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}'_2)$ bezeichnen wir die Standardbasen für V, V', W bzw. W'. Dann erhalten wir als Tensorprodukte die Basen

$$(\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}'_3, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}'_3) \quad \text{und}$$
$$(\boldsymbol{f}_1 \otimes \boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}_1 \otimes \boldsymbol{f}'_2, \boldsymbol{f}_2 \otimes \boldsymbol{f}'_1, \boldsymbol{f}_2 \otimes \boldsymbol{f}'_2)$$

für $V \otimes V'$ bzw. $W \otimes W'$. Der Homomorphismus $\varphi \otimes \varphi'$ hat bezüglich dieser Basen die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

wir erhalten sie durch direkte Rechnung oder als Kroneckerprodukt der Matrizen von φ und φ' bezüglich der kanonischen Basen.

Aufgabe 4/5/005
Eigenschaften des äußeres Produkts

Index: Tensorprodukt, äußere Potenz eines Vektorraumes, exakte Folge von Vektorräumen

Stoffeinheiten: 4/5/6 - 4/5/8 Symmetrische und äußere Potenzen

Mit U, V und W werden endlichdimensionale K-Vektorräume der Dimensionen p, n bzw. q bezeichnet. Weiter sei

$$\mathbf{0} \longrightarrow U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W \longrightarrow \mathbf{0}$$

eine exakte Folge. Beweisen Sie:

(1) Es existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\Gamma : \Lambda^p(U) \otimes_K \Lambda^q(W) \to \Lambda^n(V), \text{ für die}$$
$$\Gamma((\boldsymbol{u}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{u}_p) \otimes (\boldsymbol{w}_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}_q)) = \varphi(\boldsymbol{u}_1) \wedge \ldots \wedge \varphi(\boldsymbol{u}_p) \wedge \boldsymbol{w}'_1 \wedge \ldots \wedge \boldsymbol{w}'_q$$

ist, wenn $\boldsymbol{u}_i \in U$ und $\boldsymbol{w}_j \in W$ sind sowie $\boldsymbol{w}'_j \in V$ Vektoren bezeichnen, so dass $\psi(\boldsymbol{w}'_j) = \boldsymbol{w}_j$ gilt.

(2) Der unter (1) gefundene Homomorphismus Γ ist ein Isomorphismus.

Aufgabe 4/5/010 (S: Varianten)
Basen äußerer Potenzen

Index: äußere Potenz eines Vektorraumes, Basis einer äußeren Potenz von Vektorräumen, Koordinaten

Stoffeinheiten: 4/5/9 - 4/5/18 Symmetrische Algebra und äußere Algebra

Wir betrachten den reellen Standardraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$.

(1) Geben Sie die Basen $\Lambda^1\mathcal{B}$, $\Lambda^2\mathcal{B}$ und $\Lambda^3\mathcal{B}$ für die Vektorräume $\Lambda^1(V)$, $\Lambda^2(V)$ bzw. $\Lambda^3(V)$ an.

(2) Bestimmen Sie die Koordinaten der folgenden Vektoren bezüglich der Basen $\Lambda^i\mathcal{B}$, und zwar für

a) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$ und $\boldsymbol{x}_2 = 2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - 2 \cdot \boldsymbol{e}_3$,

und für

b) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3$, wobei $\boldsymbol{x}_1 = -2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{x}_2 = -2 \cdot \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{x}_3 = -2 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$.

Ergebnis.

(1)
$$\Lambda^1\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$$
$$\Lambda^2\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3)$$
$$\Lambda^3\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3).$$

(2) Wir erhalten durch Ausmultiplizieren

a) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2$

$$
\begin{aligned}
&= 2\cdot \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 - 2\cdot\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 + 4\cdot\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1 + 2\cdot\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2 - 4\cdot\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_3\\
&= 0 + \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 - 2\cdot\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 + 4\cdot\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1 + 2\cdot\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2 + 0\\
&= \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 - 2\cdot\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 + 4\cdot\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_1 + 2\cdot\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2\\
&= \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 - 2\cdot\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 - 4\cdot\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 - 2\cdot\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3\\
&= \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2 - 6\cdot\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3 - 2\cdot\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3,
\end{aligned}
$$

b) $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{0}$,

womit in jedem Fall das Koordinatentupel aus den entsprechenden Koeffizienten der Basisvektoren abgelesen werden kann.

Aufgabe 4/5/020 (S: Varianten)

Äußere Potenz einer Matrix

Index: äußere Potenz einer Matrix

Stoffeinheiten: 4/5/9 - 4/5/18 Symmetrische Algebra und äußere Algebra

Bestimmen Sie die folgenden äußeren Potenzen, und zwar

(1) $\Lambda^2(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ sowie}$$

(2) $\Lambda^3(B)$ für die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ergebnis.

(1) $$\Lambda^2(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 0 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\Lambda^3(B) = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 13 & -10 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4/5/030

Beispiel für den Strukturtensor einer Algebra

Index: Strukturtensor einer Algebra, gemischter Tensor

Stoffeinheiten: 4/5/19 - 4/5/23 Klassische Tensorrechnung

Gegeben sind die Matrizen

$$I := \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

als Elemente der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B} = (E_2, I, J, K)$ mit $K := I\cdot J$ eine Basis des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}[I,J]$ ist und geben Sie den Strukturtensor der $\mathbb{R}$-Algebra $\mathbb{R}[I,J]$ in Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ an.

Aufgaben zum Kapitel 5

Aufgabe 5/1/005 (S: Varianten)
Eigenwerte einer reellen Matrix

Index: Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie die (reellen!) Eigenwerte der Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $f = \chi_A(X) \in \mathbb{R}[X]$ und erhalten

$$f = \det(X \cdot \mathrm{E}_4 - A) = \det \begin{pmatrix} X & 1 & 4 & -4 \\ -1 & X+1 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & X-1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & X-2 \end{pmatrix}$$
$$= X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 4X.$$

Eigenwerte der gegebenen Matrix sind die Nullstellen von f. Offensichtlich ist X ein Faktor von f, es verbleibt nur die Bestimmung der Nullstellen von $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 4$. Eine können wir erraten: Einsetzen einiger ganzer Zahlen für X ergibt insbesondere $g(2) = 0$, g ist daher durch den Linearfaktor $X - 2$ teilbar. Wir erhalten

$$f = X \cdot (X-2) \cdot (X^2 + 2).$$

Da der letzte Faktor keine Nullstelle im Grundkörper $\mathbb{R}$ besitzt, ergeben sich für die Matrix A genau zwei Eigenwerte 0 und 2.

Aufgabe 5/1/010 (S: Varianten)
Charakteristische Polynome reeller Matrizen

Index: charakteristisches Polynom einer Matrix, Begleitmatrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -8 & 9 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Das charakteristische Polynom χ_A ist gleich der Determinante

$$\det(X \cdot \mathrm{E}_5 - A) \in \mathbb{R}[X].$$

Die Determinante der charakteristischen Matrix $B = X \cdot \mathrm{E}_5 - A$ wird nach der letzten Zeile mit den Adjunkten B'_{5i} $(i = 1, \ldots, 5)$ entwickelt, das sind die folgenden Matrizen:

$$B'_{51} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}, \ B'_{52} = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}$$

$$B'_{53} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \end{pmatrix}, \ B'_{54} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B'_{55} = \begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$$

Die Adjunkten sind entweder obere oder untere Dreiecksmatrizen oder aus solchen blockdiagonal zusammengesetzt. Mit den Diagonalelementen $b_{kk}^{(i)}$ der Adjunkten gilt daher

$$\det(B'_{5i}) = \prod_{k=1}^{4} b_{kk}^{(i)}.$$

Es folgt

$$\chi_A = X^5 - 9X^4 - 5X^3 - 9X^2 + 8X + 2.$$

Aufgabe 5/1/020

Eigenwerte einer Matrix über dem Grundkörper $\mathbb{F}_2$

Index: Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Wir betrachten die folgenden Matrizen über den Körper $\mathbb{F}_3$.

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Geben Sie in jedem Fall die Eigenwerte an!

Aufgabe 5/1/030

Eigenwerte einer komplexen Matrix

Index: Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Welche Eigenwerte hat die folgende komplexe Matrix?

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ 1+i & -1+i & 2i \\ -1 & -i & -1-i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/1/040
Reelle und komplexe Eigenwerte einer reellen Matrix

Index: Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie alle Eigenwerte von A und B an, wenn diese

(1) als Matrizen aus $\mathrm{M}(2;\mathbb{R})$ bzw.

(2) als Matrizen aus $\mathrm{M}(2;\mathbb{C})$ betrachtet werden.

Aufgabe 5/1/050
Eigenwerte und Eigenräume von Matrizen

Index: Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie für folgende Matrizen die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume (jeweils durch Angabe einer Basis).

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{R})$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{C})$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{F}_2)$

Aufgabe 5/1/060
Eigenwerte symmetrischer Matrizen

Index: Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/1 - 5/1/3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Es sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. $A = {}^{t}A$). Beweisen Sie, dass alle komplexen Eigenwerte von A reell sind.

Aufgabe 5/1/070
Eigenwerte von Quadraten

Index: Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/1 - 5/1/3 Eigenwerte und Eigenvektoren

A sei eine quadratische Matrix über $\mathbb{C}$. Beweisen Sie: Die Eigenwerte der Matrix A^2 sind genau die Quadrate der Eigenwerte von A.

Aufgabe 5/1/080
Eigenwerte, Eigenschaften

Index: Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/1 - 5/1/3 Eigenwerte und Eigenvektoren

$A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ sei eine komplexe Matrix. Beweisen Sie:

(1) Falls A den Rang r hat, so besitzt A höchstens r von 0 verschiedene Eigenwerte (die mit der jeweiligen algebraischen Multiplizität gezählt werden).

(2) Ist $r = 1$, so gilt: Der einzige eventuell von 0 verschiedene Eigenwert von A ist die Spur $\mathrm{tr}(A)$ der Matrix A.

Aufgabe 5/1/090
Potenzen von Eigenwerten

Index: Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/1 - 5/1/3 Eigenwerte und Eigenvektoren

$\varphi : V \to V$ sei Endomorphismus des K-Vektorraumes V und $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:

(1) Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von φ, so ist λ^k Eigenwert des Endomorphismus φ^k.

(2) Ist $\boldsymbol{x} \in V$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ, so ist $\boldsymbol{x} \in V$ Eigenvektor von φ^k zum Eigenwert λ^k.

Aufgabe 5/1/100
Eigenwerte von Dreiecksmatrizen

Index: Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/1 - 5/1/3 Eigenwerte und Eigenvektoren

$A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n;K)$ sei eine obere Dreiecksmatrix. Zeigen Sie, dass $\{a_{11}, \ldots, a_{nn}\}$ die Menge der Eigenwerte von A ist.

Aufgabe 5/1/110
Eigenwerte und Regularität

Index: Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/1 - 5/1/3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Zeigen Sie: $A \in \mathrm{M}(n;K)$ ist genau dann regulär, wenn 0 kein Eigenwert der Matrix A ist.

Aufgabe 5/1/120
Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit (1)

Index: Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

$A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{R})$ sei eine Matrix und $\lambda \geq 0$ Eigenwert der Matrix A^2. Beweisen Sie, dass dann eine der Zahlen $\sqrt{\lambda}$ oder $-\sqrt{\lambda}$ Eigenwert von A ist.

Aufgabe 5/1/130
Gemeinsame Basen aus Eigenvektoren

Index: Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Beweisen Sie: Ist $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n)$ eine Basis des Standardraumes K^n und sind die Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ Eigenvektoren sowohl der Matrix $A \in \mathrm{M}(n;K)$ als auch der Matrix $B \in \mathrm{M}(n;K)$, dann gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

Aufgabe 5/2/010 (S: Varianten)
Diagonalisierbarkeit einer Matrix über den reellen Zahlen

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Zeigen Sie, dass die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 20 & 40 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine reguläre Matrix U mit der Eigenschaft $D = U^{-1} \cdot A \cdot U$ an.

Lösung. Zunächst wird das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix bestimmt. $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A)$ ist z.B. durch Entwicklung nach der letzten Spalte zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det \begin{pmatrix} X+5 & 8 & 0 \\ -4 & X-7 & 0 \\ -20 & -40 & X+1 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} X+5 & 8 \\ -4 & X-7 \end{pmatrix} \cdot (X+1) \\ &= (X-3) \cdot (X+1)^2 \end{aligned}$$

Nullstellen sind die Eigenwerte 3 und -1 der Matrix A.

Zur Bestimmung des Eigenraumes zum Eigenwert $\lambda = 3$ haben wir das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\lambda \cdot E_3 - A$, d.h. das System

$$\begin{aligned} 8x_1 + 8x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 4x_2 &= 0 \\ -20x_1 - 40x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Eine Basis seines eindimensionalen Lösungsraumes ist der Vektor $\boldsymbol{v}_1 = (-1, 1, 5)$. (Es genügt hier, einen von Null verschiedenen Lösungsvektor zu erraten, da $\dim(V_3) = 1$ von vornherein klar ist.)

Entsprechend ergibt sich zum Eigenwert $\lambda = -1$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 8x_2 &= 0 \\ -20x_1 - 40x_2 &= 0 \end{aligned}$$

für den Eigenraum V_{-1}; mit dem gaußschen Algorithmus finden wir eine Basis $(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = ((-2,1,0),(0,0,1))$. Folglich hat der Eigenwert $\lambda = -1$ die geometrische Multiplizität 2. Da für beide Eigenwerte algebraische und geometrische Multiplizität übereinstimmen, ist A diagonalisierbar. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

von $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ zur kanonischen Basis erhalten wir ohne weitere Rechnung die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U$$

in der Ähnlichkeitsklasse von A.

Anmerkung. Geschicktes Rechnen kann den Aufwand beträchtlich verringern. So ist es beispielsweise nach der Bestimmung von χ_A schon klar, dass der Eigenraum V_{-1} nur die Dimension 1 oder 2 haben kann. $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ ist offensichtlich ein Eigenvektor der gegebenen Matrix A. Lässt sich ein weiterer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$ erraten, der kein Vielfaches von $\boldsymbol{e}_3$ ist, so ist damit bereits eine Basis für V_{-1} gefunden. Im vorliegenden Beispiel wäre dies mit $\boldsymbol{v}_2 = (-2,1,0)$ nicht besonders schwierig gewesen.

Aufgabe 5/2/024 (S: Varianten)

Diagonalisierbarkeit in der Dimension 3 (1)

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Entscheiden Sie, welche der folgenden drei Matrizen $A^{(i)}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -5 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Jede der Matrizen hat die Zahl 1 als Eigenwert.

Lösung. Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.
In unserem Falle sind zunächst die drei charakteristischen Polynome $\chi_{A^{(i)}}$ aus $\mathbb{R}[X]$ für $i = 1,2,3$ zu berechnen, d.h. die Determinanten der charakteristischen Matrizen $B^{(i)} = X \cdot \mathrm{E}_3 - A^{(i)}$. Es gilt

$$\chi_{A^{(i)}} = \det(B^{(i)}) .$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\chi_{A^{(i)}} = b_{11}^{(i)} b_{22}^{(i)} b_{33}^{(i)} + b_{12}^{(i)} b_{23}^{(i)} b_{31}^{(i)} + b_{13}^{(i)} b_{21}^{(i)} b_{32}^{(i)}$$

$$-b_{13}^{(i)}b_{22}^{(i)}b_{31}^{(i)} - b_{12}^{(i)}b_{21}^{(i)}b_{33}^{(i)} - b_{11}^{(i)}b_{23}^{(i)}b_{32}^{(i)} .$$

Für $i = 1$ ist

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} X+1 & -3 & 2 \\ 2 & X-5 & 3 \\ 0 & -2 & X+1 \end{pmatrix} .$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$b_{11}^{(1)}b_{22}^{(1)}b_{33}^{(1)} = X^3 - 3X^2 - 9X - 5\,,\ b_{12}^{(1)}b_{23}^{(1)}b_{31}^{(1)} = 0\,,\ b_{13}^{(1)}b_{21}^{(1)}b_{32}^{(1)} = -8\,,$$
$$b_{13}^{(1)}b_{22}^{(1)}b_{31}^{(1)} = 0\,,\ b_{12}^{(1)}b_{21}^{(1)}b_{33}^{(1)} = -6X - 6\,,\ b_{11}^{(1)}b_{23}^{(1)}b_{32}^{(1)} = -6X - 6\,.$$

Es folgt

$$\chi_{A^{(1)}} = X^3 - 3X^2 + 3X - 1\,.$$

Analog ergeben sich

$$\chi_{A^{(2)}} = X^3 + X^2 - 2\,,$$
$$\chi_{A^{(3)}} = X^3 + 3X^2 - X - 3\,.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe müssen die charakteristischen Polynome durch $X - 1$ teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen der quadratischen Polynome $\psi_{A^{(i)}} = \chi_{A^{(i)}}/(X-1)$ zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_{A^{(1)}} = X^2 - 2X + 1\,,$$
$$\psi_{A^{(2)}} = X^2 + 2X + 2\,,$$
$$\psi_{A^{(3)}} = X^2 + 4X + 3\,.$$

Das Polynom $\psi_{A^{(1)}}$ besitzt eine Doppelnullstelle mit dem Wert 1, das Polynom $\psi_{A^{(2)}}$ keine reellen Nullstellen und das Polynom $\psi_{A^{(3)}}$ zwei verschiedene reelle Nullstellen ungleich 1. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:

Nur die Matrix $A^{(3)}$ ist diagonalisierbar.

Begründung. Alle Eigenwerte der Matrix $A^{(3)}$ sind reell und haben die algebraische Vielfachheit 1.

Die übrigen können folgendermaßen ausgeschlossen werden: Aus der Diagonalisierbarkeit folgt, dass das charakteristische Polynom über $\mathbb{R}$ in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt – dies ist nicht der Fall, wenn ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen auftritt. Ist eine Matrix mit einem einzigen Eigenwert diagonalisierbar, so ist sie bereits selbst eine Diagonalmatrix – dies ist jedoch hier nicht der Fall.

Aufgabe 5/2/025 (S: Varianten)

Diagonalisierbarkeit in der Dimension 3 (2)

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Entscheiden Sie, welche der folgenden Matrizen $A^{(i)}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad A^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & -5 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Jede der Matrizen hat die Zahl 1 als Eigenwert.

Lösung. Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.
In unserem Falle sind zunächst die beiden charakteristischen Polynome $\chi_{A^{(i)}}$ aus $\mathbb{R}[X]$ mit $i = 1, 2$ zu berechnen, d.h. die Determinanten der charakteristischen Matrizen $B^{(i)} = X \cdot \mathrm{E}_3 - A^{(i)}$. Es gilt

$$\chi_{A^{(i)}} = \det(B^{(i)})\,.$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\begin{aligned}\chi_{A^{(i)}} &= b_{11}^{(i)} b_{22}^{(i)} b_{33}^{(i)} + b_{12}^{(i)} b_{23}^{(i)} b_{31}^{(i)} + b_{13}^{(i)} b_{21}^{(i)} b_{32}^{(i)} \\ &\quad - b_{13}^{(i)} b_{22}^{(i)} b_{31}^{(i)} - b_{12}^{(i)} b_{21}^{(i)} b_{33}^{(i)} - b_{11}^{(i)} b_{23}^{(i)} b_{32}^{(i)}\,.\end{aligned}$$

Für $i = 1$ ist

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} X+2 & -4 & 5 \\ 3 & X-5 & 5 \\ 0 & -1 & X+2 \end{pmatrix}.$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$b_{11}^{(1)} b_{22}^{(1)} b_{33}^{(1)} = X^3 - X^2 - 16X - 20\,,\ b_{12}^{(1)} b_{23}^{(1)} b_{31}^{(1)} = 0\,,\ b_{13}^{(1)} b_{21}^{(1)} b_{32}^{(1)} = -15\,,$$
$$b_{13}^{(1)} b_{22}^{(1)} b_{31}^{(1)} = 0\,,\ b_{12}^{(1)} b_{21}^{(1)} b_{33}^{(1)} = -12X - 24\,,\ b_{11}^{(1)} b_{23}^{(1)} b_{32}^{(1)} = -5X - 10\,.$$

Es folgt

$$\chi_{A^{(1)}} = X^3 - X^2 + X - 1\,.$$

Analog ergibt sich

$$\chi_{A^{(2)}} = X^3 + 3X^2 - X - 3\,.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe müssen die charakteristischen Polynome durch $X - 1$ teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen der quadratischen Polynome $\psi_{A^{(i)}} = \chi_{A^{(i)}}/(X-1)$ zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_{A^{(1)}} = X^2 + 1\,,$$
$$\psi_{A^{(2)}} = X^2 + 4X + 3\,.$$

Das Polynom $\psi_{A^{(1)}}$ besitzt keine reellen Nullstellen und das Polynom $\psi_{A^{(2)}}$ besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen ungleich 1. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:

Nur die Matrix $A^{(2)}$ ist diagonalisierbar.

Begründung. Alle Eigenwerte der Matrix $A^{(2)}$ sind reell und haben die algebraische Vielfachheit 1.
Die andere Matrix kann folgendermaßen ausgeschlossen werden: Aus der Diagonalisierbarkeit folgt, dass das charakteristische Polynom über $\mathbb{R}$ in ein Produkt von Linearfaktoren zerfällt – dies ist nicht der Fall, wenn ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen auftritt.

Aufgabe 5/2/026 (S: Varianten)
Nichtdiagonalisierbarkeit, reelle Eigenwerte

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Entscheiden Sie, ob die folgende Matrix A über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Die Matrix hat die Zahl 1 als Eigenwert.

Lösung. Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.
Dazu ist zunächst das charakteristische Polynom χ_A aus $\mathbb{R}[X]$ mit zu berechnen, d.h. die Determinante der charakteristischen Matrix $B = X \cdot \mathrm{E}_3 - A$. Es gilt

$$\chi_A = \det(B)\,.$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\chi_A = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}$$
$$-b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32}\,.$$

Die charakteristische Matrix ist

$$B = \begin{pmatrix} X-5 & 4 & 2 \\ -4 & X+3 & 2 \\ -1 & 0 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$b_{11}b_{22}b_{33} = X^3 - X^2 - 17X - 15\,,\ b_{12}b_{23}b_{31} = -8\,,\ b_{13}b_{21}b_{32} = 0\,,$$
$$b_{13}b_{22}b_{31} = -2X - 6\,,\ b_{12}b_{21}b_{33} = -16X - 16\,,\ b_{11}b_{23}b_{32} = 0\,.$$

Es folgt

$$\chi_A = X^3 - X^2 + X - 1\,.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe muss das charakteristische Polynom durch $X-1$ teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen des quadratischen Polynoms $\psi_A = \chi_A/(X-1)$ zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_A = X^2 + 1\,.$$

Das Polynom ψ_A hat eine Doppelnullstelle ebenfalls mit dem Wert 1. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:

Die Matrix A ist nicht diagonalisierbar.

Begründung. Ist eine Matrix mit einem einzigen Eigenwert diagonalisierbar, so ist sie bereits selbst eine Diagonalmatrix – dies ist jedoch hier nicht der Fall.

Aufgabe 5/2/027 (S: Varianten)

Nichtdiagonalisierbarkeit, komplexe Eigenwerte

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Entscheiden Sie, ob die folgende Matrix A über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Die Matrix hat die Zahl 1 als Eigenwert.

Lösung. Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.
Dazu ist zunächst das charakteristische Polynom χ_A aus $\mathbb{R}[X]$ mit zu berechnen, d.h. die Determinante der charakteristischen Matrix $B = X \cdot \mathrm{E}_3 - A$. Es gilt

$$\chi_A = \det(B)\,.$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\chi_A = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}$$
$$-b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32}\,.$$

Die charakteristische Matrix ist

$$B = \begin{pmatrix} X-5 & 1 & 5 \\ -3 & X+1 & 5 \\ -2 & 0 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$b_{11}b_{22}b_{33} = X^3 - 3X^2 - 9X - 5\,,\ b_{12}b_{23}b_{31} = -10\,,\ b_{13}b_{21}b_{32} = 0\,,$$
$$b_{13}b_{22}b_{31} = -10X - 10\,,\ b_{12}b_{21}b_{33} = -3X - 3\,,\ b_{11}b_{23}b_{32} = 0\,.$$

Es folgt

$$\chi_A = X^3 - 3X^2 + 4X - 2\,.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe muss das charakteristische Polynom durch $X-1$ teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen des quadratischen Polynoms $\psi_A = \chi_A/(X-1)$ zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_A = X^2 - 2X + 2\,.$$

Das Polynom ψ_A besitzt keine reellen Nullstellen, d.h. χ_A ist kein Produkt von reellen Linearfaktoren. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:
Die Matrix A ist über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar.

Aufgabe 5/2/028 (S: Varianten)
Diagonalisierbarkeit in der Dimension 3 (3)

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Entscheiden Sie, ob die folgende Matrix A über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Die Matrix hat die Zahl 1 als Eigenwert.

Lösung. Um eine Matrix auf Diagonalisierbarkeit zu untersuchen, werden zunächst ihre Eigenwerte, also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt.
Dazu ist zunächst das charakteristische Polynom χ_A aus $\mathbb{R}[X]$ mit zu berechnen, d.h. die Determinante der charakteristischen Matrix $B = X \cdot \mathrm{E}_3 - A$. Es gilt

$$\chi_A = \det(B)\,.$$

Die leibnizsche Formel (vgl. 4/2/6) führt im Falle der Dimension 3 auf die sarrussche Regel

$$\chi_A = b_{11}b_{22}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + b_{13}b_{21}b_{32}$$
$$-b_{13}b_{22}b_{31} - b_{12}b_{21}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32}\,.$$

Die charakteristische Matrix ist

$$B = \begin{pmatrix} X+5 & -5 & 3 \\ 3 & X-1 & -3 \\ 1 & 0 & X-2 \end{pmatrix}.$$

Die angegebenen Produkte in der sarrusschen Regel sind

$$b_{11}b_{22}b_{33} = X^3 + 2X^2 - 13X + 10\,,\ b_{12}b_{23}b_{31} = 15\,,\ b_{13}b_{21}b_{32} = 0\,,$$
$$b_{13}b_{22}b_{31} = 3X - 3\,,\ b_{12}b_{21}b_{33} = -15X + 30\,,\ b_{11}b_{23}b_{32} = 0\,.$$

Es folgt

$$\chi_A = X^3 + 2X^2 - X - 2\,.$$

Nach dem Hinweis zur Aufgabe muss das charakteristische Polynom durch $X-1$ teilbar sein, daher sind nur noch die Nullstellen des quadratischen Polynoms $\psi_A = \chi_A/(X-1)$ zu untersuchen. Die Division ergibt

$$\psi_A = X^2 + 3X + 2\,.$$

Das Polynom ψ_A besitzt zwei verschiedene reelle Nullstellen ungleich 1. Die Frage nach der Diagonalisierbarkeit lässt sich nun beantworten:

Die Matrix A ist diagonalisierbar.

Begründung. Alle Eigenwerte der Matrix A sind reell und haben die algebraische Vielfachheit 1.

Aufgabe 5/2/030
Diagonalisierbarkeit

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Stellen Sie fest, welche der folgenden Matrizen sich diagonalisieren lässt.

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

(2) $$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/2/040
Diagonalisierbarkeit, Eigenschaften

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Untersuchen Sie, ob die folgende Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_3)$ diagonalisierbar ist und geben Sie in diesem Fall für den Standardraum $\mathbb{F}_3^4$ eine Basis aus Eigenvektoren an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/2/050
Diagonalisierbarkeit und das Auffinden einer Transformationsmatrix (1)

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Zeigen Sie, dass die folgende Matrix A diagonalisierbar ist und bestimmen Sie eine reguläre Matrix U, für die $U^{-1} \cdot A \cdot U$ eine Diagonalmatrix ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/2/060
Diagonalisierbarkeit und das Auffinden einer Transformationsmatrix (2)

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Wir betrachten die folgende Matrix A über dem Körper $\mathbb{F}_2$. Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist und geben Sie eine Diagonalmatrix B an sowie eine reguläre Matrix U, für die $B = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/2/070
Diagonalisierbarkeit einer Drehmatrix

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Für welche $\varphi \in \mathbb{R}$ ist die *Drehmatrix*

$$\mathrm{M}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 5/2/080

Diagonalisierbarkeit in Abhängigkeit von einem Parameter

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & -t+2 & 0 \\ -t+2 & t+1 & 0 \\ -\frac{1}{2}t+2 & -\frac{1}{2}t+1 & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3;\mathbb{R})$$

über dem Körper $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

Aufgabe 5/2/090

Hinreichende Bedingung für die Diagonalisierbarkeit einer Dreiecksmatrix

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Zeigen Sie: Für die Diagonalisierbarkeit einer oberen Dreiecksmatrix ist es hinreichend, dass die Diagonalelemente paarweise verschieden sind.

Aufgabe 5/2/100

Diagonalisierbarkeit der Ableitung

Index: diagonalisierbarer Endomorphismus, diagonalisierbare Matrix, Eigenwert einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

V sei der Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, der von den Abbildungen 1, $\sin(x)$, $\cos(x)$ erzeugt wird.

(1) Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 3$.

(2) Es sei $\varphi : V \to V$ der lineare Endomorphismus $f \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f)$ von V, der durch die Ableitung definiert wird. Ist φ diagonalisierbar?

Aufgabe 5/2/110

Endomorphismen und charakteristische Polynome

Index: charakteristisches Polynom eines Endomorphismus

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Geben Sie für $n \geq 2$ eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ an, für die $\varphi \neq \psi$ gilt, deren charakteristische Polynome jedoch übereinstimmen.

Aufgabe 5/2/120
Charakteristisches Polynom und Minimalpolynom

Index: charakteristisches Polynom einer Matrix, Einsetzen einer Matrix in ein Polynom

Stoffeinheiten: 5/1/4 - 5/1/9 Charakteristisches Polynom

Bestimmen Sie für folgende Matrizen die charakteristischen Polynome sowie ein normiertes Polynom $f \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ minimalen Grades, für das $f(A)$ die Nullmatrix ist.

(1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{R})$$

(2) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$$

Aufgabe 5/2/130
Simultane Eigenwerte

Index: Eigenwert eines Endomorphismus, Eigenvektor eines Endomorphismus

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

Wir betrachten einen endlichdimensionalen Vektorraum V über den komplexen Zahlen und zwei lineare Endomorphismen φ und ψ von V. Beweisen Sie:

(1) $\varphi \cdot \psi$ und $\psi \cdot \varphi$ besitzen einen gemeinsamen Eigenwert.

(2) Ist $\varphi \cdot \psi = \psi \cdot \varphi$, so besitzen φ und ψ einen gemeinsamen Eigenvektor.

Aufgabe 5/2/140
Zerlegung eines Endomorphismus in eine Summe diagonalisierbarer Endomorphismen

Index: Eigenwert eines Endomorphismus, Eigenvektor eines Endomorphismus, diagonalisierbarer Endomorphismus

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

K sei ein unendlicher Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung jeder Endomorphismus von V Summe zweier diagonalisierbarer Endomorphismen ist.

Aufgabe 5/2/150
Diagonalisierbarkeit von $f(A)$ für $f \in K[X]$

Index: diagonalisierbare Matrix, Eigenvektor einer Matrix, Einsetzen einer Matrix in ein Polynom

Stoffeinheiten: 5/2/1 - 5/2/7 Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus

$A \in \mathrm{M}(n; K)$ sei eine Matrix über dem Körper K sowie f ein Polynom mit Koeffizienten aus K. Beweisen Sie: Wenn A diagonalisierbar ist, dann ist auch $f(A)$ diagonalisierbar.

Aufgabe 5/2/160
Eigenwerte und Diagonalisierbarkeit (2)

Index: charakteristisches Polynom einer Matrix, Eigenwert einer Matrix, diagonalisierbare Matrix, halbeinfache Matrix, Eigenvektor einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/8 - 5/2/12 Halbeinfache Endomorphismen

Wir betrachten die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie:

(1) Ist $(a-d)^2 + 4bc > 0$, so ist A diagonalisierbar.

(2) Ist $(a-d)^2 + 4bc < 0$, so ist A nicht diagonalisierbar.

(3) Für $(a-d)^2 + 4bc = 0$ existieren sowohl Matrizen A, die diagonalisierbar sind als auch solche, für die das nicht zutrifft.

(4) Ist $(a-d)^2 + 4bc \neq 0$, so ist A halbeinfach.

Aufgabe 5/2/170 (S: Varianten)
Trigonalisierung

Index: trigonalisierbare Matrix, Fahne in einem Vektorraum, vollständige bzw. maximale Fahne

Stoffeinheiten: 5/2/13 - 5/2/17 Trigonalisierung

Trigonalisieren Sie die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

d.h. geben Sie eine obere Dreiecksmatrix B sowie eine reguläre Matrix U an, für die $B = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

Lösung. Zur Trigonalisierung der Matrix A berechnen wir zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A)$. Es ist $\chi_A = (X-6)^3$ (daraus folgt, dass A trigonalisierbar, nicht jedoch diagonalisierbar ist, denn die Ähnlichkeitsklasse einer Matrix $\lambda \cdot E_n$ ist einelementig). Zur Bestimmung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda = 6$ haben wir das homogene lineare Gleichungssystem mit der Koeffizientenmatrix $\lambda \cdot E_3 - A$, d.h. das System

$$\begin{aligned} -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Wir finden als Basis seines eindimensionalen Lösungsraumes einen Vektor $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 2)$.

Wird mit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ der Endomorphismus des Standardraumes bezeichnet, der durch $M(\varphi) = A$ definiert ist, so gilt zunächst $\varphi(\boldsymbol{v}_1) = \lambda \cdot \boldsymbol{v}_1$. Die Aufgabe ist gelöst, wenn wir $\boldsymbol{v}_1$ zu einer Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ ergänzen, für die die dritte Koordinate des Vektors $\varphi(\boldsymbol{v}_2)$ verschwindet.

Zunächst kann einer der Vektoren der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ durch den hier gefundenen Vektor $\boldsymbol{v}_1$ ersetzt werden, so dass wiederum eine Basis entsteht; wir wählen $\mathcal{B}_1 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$. Mit diesen Vektoren als Spalten ergibt sich eine Übergangsmatrix

$$U_1 := U_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und so eine zu A ähnliche Matrix

$$A_1 = U_1^{-1} \cdot A \cdot U_1 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Die Teilmatrix

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2; \mathbb{R})$$

der Matrix A hat als einzigen Eigenwert ebenfalls $\lambda = 6$. Lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$(\lambda \cdot E_2 - A') \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so erhalten wir für A' einen Eigenvektor $(-1, 2) \in \mathbb{R}^2$. Wählen wir Vektoren $\boldsymbol{v}_2$ mit den Koordinaten $(0, -1, 2)$ und $\boldsymbol{v}_3$ mit Koordinaten $(0, 0, 1)$ (bezüglich $\mathcal{B}_1$), so entsteht eine neue Basis $\mathcal{B}_2 = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ des Standardraumes $\mathbb{R}^3$, für die $M_{\mathcal{B}_2}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Mit der Übergangsmatrix

$$U_2 := U_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$M_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = U_2^{-1} \cdot A_1 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

diese Matrix ist eine Trigonalisierung von A, d.h.

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U$$

mit

$$U = U_1 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/2/180 (S: Varianten)

Halbeinfachheit (1) (Grundkörper $\mathbb{Q}$)

Index: diagonalisierbare Matrix, halbeinfache Matrix, Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor eine Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/8 - 5/2/12 Halbeinfache Endomorphismen

Untersuchen Sie, ob die folgende Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{Q})$ halbeinfach ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $f = \chi_A(X) \in \mathbb{Q}[X]$ und erhalten

$$\begin{aligned} f = \det \begin{pmatrix} X & 1 & -1 & 1 \\ -1 & X+1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & X-2 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & X+4 \end{pmatrix} \\ = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 2\,. \end{aligned}$$

Um festzustellen, ob f mehrfache Nullstellen besitzt, wird der größte gemeinsame Teiler von f und der Ableitung f' von f bestimmt. Es ist

$$f' = 4X^3 + 9X^2 + 8X + 3\,.$$

Der euklidische Algorithmus ergibt $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$. Daher hat f keine mehrfachen komplexen Nullstellen, d.h. die Matrix A hat 4 verschiedene Eigenwerte in $\mathbb{C}$, ist also halbeinfach.

Aufgabe 5/2/190 (S: Varianten)
Halbeinfachheit (2) (Grundkörper $\mathbb{F}_2$)

Index: diagonalisierbare Matrix, halbeinfache Matrix, Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor eine Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/8 - 5/2/12 Halbeinfache Endomorphismen

Untersuchen Sie, ob die folgende Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_2)$ halbeinfach ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $f = \chi_A(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ und erhalten

$$\begin{aligned} f = \det \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & X+1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & X+1 \end{pmatrix} \\ = X^4 + X + 1\,. \end{aligned}$$

Um festzustellen, ob f mehrfache Nullstellen besitzt, wird der größte gemeinsame Teiler von f und der Ableitung f' von f bestimmt. Es ist

$$f' = 1\,.$$

Aus $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$ folgt, dass f keine mehrfachen Nullstellen in den Erweiterungskörpern von $\mathbb{F}_2$ besitzt. In einem Zerfällungskörper des Polynoms f hat die Matrix A daher 4 verschiedene Eigenwerte, ist also halbeinfach.

Aufgabe 5/2/200 (S: Varianten)
Halbeinfachheit (3) (Grundkörper $\mathbb{F}_5$)

Index: diagonalisierbare Matrix, halbeinfache Matrix, Eigenwert einer Matrix, Eigenvektor eine Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/2/8 - 5/2/12 Halbeinfache Endomorphismen

Untersuchen Sie, ob die folgende Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{F}_5)$ halbeinfach ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung. Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom $f = \chi_A(X) \in \mathbb{F}_5[X]$ und erhalten

$$f = \det \begin{pmatrix} X-2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & X+2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & X+2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & X-1 \end{pmatrix}$$
$$= X^4 + X^3 - 2X^2 - X - 1\,.$$

Um festzustellen, ob f mehrfache Nullstellen besitzt, wird der größte gemeinsame Teiler von f und der Ableitung f' von f bestimmt. Es ist

$$f' = -X^3 - 2X^2 + X - 1\,.$$

Der euklidischen Algorithmus ergibt $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$. Daher hat f keine mehrfachen Nullstellen in den Erweiterungskörpern von $\mathbb{F}_5$. In einem Zerfällungskörper des Polynoms f besitzt die Matrix A daher 4 verschiedene Eigenwerte, ist also halbeinfach.

Aufgabe 5/2/210
Fahnen

Index: Fahne in einem Vektorraum, vollständige bzw. maximale Fahne

Stoffeinheiten: 5/2/13 - 5/2/17 Trigonalisierung

$(U_0, U_1, \ldots, U_t)$ sei eine Fahne im endlichdimensionalen K-Vektorraum V, d.h. U_i sind paarweise verschiedene Unterräume, $U_0 = \mathbf{0}$, $U_t = V$ und $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \ldots \subseteq U_t$. Beweisen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $t = \dim_K(V)$

(2) $\dim_K(U_i/U_{i-1}) = 1$ für $1 \leq i \leq t$

(3) Ist U Unterraum von V und $U_{i-1} \subseteq U \subseteq U_i$ für einen Index $i \in \{1, \ldots, t\}$, so gilt $U = U_{i-1}$ oder $U = U_i$ (d.h. die Fahne lässt sich nicht verlängern).

Aufgabe 5/3/010 (S: Varianten)
Normalformen nilpotenter Matrizen

Index: nilpotente Matrix, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Überprüfen Sie, dass die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$$

nilpotent ist und geben Sie ihre Normalform B, sowie eine reguläre Matrix U an, für die $B = U^{-1} \cdot A \cdot U$ ist.

Lösung. Offensichtlich ist

$$A \neq 0, \quad A^2 = 0, \quad \mathrm{rang}(A) = 2,$$

daher muss A die Normalform haben, die der Partition $(2, 2)$ von 4 entspricht.

Zur Bestimmung der zyklischen Vektoren berechnen wir zunächst den Kern $K = \ker(\varphi)$ der zugehörigen linearen Abbildung, der durch die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A gegeben ist. $((-1, 0, 0, 2), (1, 1, 0, 0))$ ist eine Basis von K; diese wird durch die Vektoren $\boldsymbol{w}_{11} = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{w}_{12} = (0, 0, 1, 0)$ der kanonischen Basis zu einer Basis von V ergänzt.

Zusammen mit $\boldsymbol{w}_{21} = \varphi(\boldsymbol{w}_{11}) = (-4, -6, 0, -4)$ und $\boldsymbol{w}_{22} = \varphi(\boldsymbol{w}_{12}) = (5, 7, 0, 4)$ entsteht eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_{11}, \boldsymbol{w}_{21}, \boldsymbol{w}_{12}, \boldsymbol{w}_{22})$ von V, bezüglich der $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die gesuchte Normalform B annimmt. Werden die Vektoren aus $\mathcal{B}$ als Spalten einer Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

angeordnet, so erhalten wir durch

$$B = U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Normalform von A.

Aufgabe 5/3/020

Nilpotente Endomorphismen (1)

Index: nilpotente Matrix, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum, nilpotenter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Untersuchen Sie, welche der folgenden Matrizen nilpotent ist und geben Sie in diesem Fall die jordansche Normalform an.

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/3/030
Nilpotente Endomorphismen (2)

Index: nilpotente Matrix, nilpotenter Endomorphismus, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2;\mathbb{R})$. Welche Bedingungen müssen a, b, c, d erfüllen, damit A nilpotent ist? Geben Sie in diesem Fall die jordansche Normalform an.

Aufgabe 5/3/040
Nilpotente Endomorphismen (3)

Index: nilpotente Matrix, nilpotenter Endomorphismus, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum, Young-Diagramm

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Es sei $A \in \mathrm{M}(7;\mathbb{C})$ und $A^4 = 0$; bestimmen Sie alle möglichen jordanschen Normalformen der Matrix A.

Aufgabe 5/3/050
Nilpotente Endomorphismen (4)

Index: nilpotente Matrix, nilpotenter Endomorphismus, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum, Young-Diagramm

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Klassifizieren Sie alle nilpotenten Matrizen $A \in \mathrm{M}(6;\mathbb{C})$ mit $\mathrm{rang}(A) = 3$ bis auf Ähnlichkeit.

Aufgabe 5/3/060
Ähnlichkeit, Beispiel

Index: nilpotente Matrix, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum, Ähnlichkeit

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Zeigen Sie, dass die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ähnlich sind.

Aufgabe 5/3/070
Nilpotente Endomorphismen (5)

Index: nilpotenter Endomorphismus, nilpotente Matrix, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum, Ähnlichkeit

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Es seien $V = \mathbb{R}^5$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ durch

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 + x_3 + x_5, x_3 + x_4 + x_5, x_4 - x_5, 0, 0)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass φ nilpotent ist und bestimmen Sie eine Basis in V, bezüglich der die Matrix von φ ihre kanonische Form annimmt.

Aufgabe 5/3/080
Ein falsches Verfahren

Index: nilpotenter Endomorphismus, nilpotente Matrix, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum, Ähnlichkeit

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

Wir fixieren einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V.

(1) φ sei ein nilpotenter Endomorphismus von V sowie $(\boldsymbol{v}_{11}, \dots, \boldsymbol{v}_{1q})$ eine Basis von $\ker(\varphi)$. Zu jedem der Vektoren $\boldsymbol{v}_{1j}$ wird für $i = 1, 2, \dots$ eine Kette von Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ gewählt, für die $\varphi(\boldsymbol{v}_{i+1\,j}) = \boldsymbol{v}_{ij}$ ist (dies entspricht der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wenn φ durch eine Matrix beschrieben wird).
Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{v}_{1j}, \dots, \boldsymbol{v}_{ij})$ ein linear unabhängiges System ist und das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbricht.
Überdies ist die Familie aller so aufgefundenen Vektoren $\boldsymbol{v}_{ij}$ linear unabhängig.

(2) Wenn die unter (1) gefundene linear unabhängige Familie $(\boldsymbol{v}_{ij})_{i,j}$ aus $\dim(V)$ Vektoren besteht, d.h. eine Basis $\mathcal{B}$ von V bildet, so erhalten wir (bei geeigneter Anordnung der Vektoren) als zugehörige Matrix $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ die jordansche Normalform.

(3) Zeigen Sie, dass die jordansche Normalform eines nilpotenten Endomorphismus nicht immer so gefunden werden kann.

(4) Erläutern Sie, wie sich aus dem Verfahren (1) im folgenden Spezialfall dennoch eine Methode ergibt, die jordansche Normalform eines Endomorphismus zu bestimmen: Das charakteristische Polynom zerfällt in (bekannte) Linearfaktoren, und sämtliche Eigenwerte haben die geometrische Multiplizität 1.

Aufgabe 5/4/010
Jordansche Normalform (1) (Grundkörper $\mathbb{R}$)

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, Eigenvektoren einer Matrix, Hauptraum einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie eine jordansche Normalform der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/4/020
Jordansche Normalform (2) (Grundkörper $\mathbb{F}_5$)

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, Eigenvektoren einer Matrix, Hauptraum, Minimalpolynom einer quadratischen Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie für folgende die Matrix A über dem Körper $\mathbb{F}_5$ eine jordansche Normalform und geben Sie das Minimalpolynom an.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/4/030
Jordansche Normalform (3) (Grundkörper $\mathbb{C}$)

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, Eigenvektoren einer Matrix, Hauptraum einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie die jordanschen Normalformen der folgenden komplexen Matrizen.

(1) $$\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & 1 & 1 & -i \\ -i & 1 & 1 & i \\ 1 & -i & i & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/4/035 (S: Varianten)
Jordansche Normalform und Übergangsmatrix

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, Eigenvektoren einer Matrix, Hauptraum einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie die jordansche Normalform J der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -5 & -7 \\ -7 & -7 & -9 & -15 \\ 6 & 5 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

sowie eine Matrix $U \in \mathrm{GL}(4;\mathbb{R})$ für die $U^{-1}\cdot A\cdot U = J$ ist.

Anmerkung. Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat, seine Nullstellen sind reell.

Lösung. Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{R}^4$ bezeichnen wir mit φ.
Als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X\cdot E_4 - A) = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 = (X^2 - 3X + 2)^2$$

erhalten wir die (sämtlich reellen) Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -5 & -7 \\ -7 & -7 & -11 & -15 \\ 6 & 5 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = (1, 0, -2, 1)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = (3, 2, -3, 0)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & -5 & -7 \\ -7 & -7 & -11 & -15 \\ 6 & 5 & 9 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (-2, 1, 1, 0)$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (1, -1, -3, 2)$$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4)\cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \boldsymbol{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4)\cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir

$$J = \begin{pmatrix} 2&0&0&0\\ 1&2&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix}$$

mit $U^{-1}\cdot A\cdot U = J$ als jordansche Normalform der Matrix A.

Aufgabe 5/4/040 (S: Varianten)

Jordansche Normalform und Übergangsmatrix

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, Eigenvektoren einer Matrix, Hauptraum einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie eine jordansche Normalform J der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1&-3&-3&-4&6\\ -1&0&1&3&-3\\ 2&-3&-4&-3&5\\ 2&-1&-2&-3&3\\ 1&-1&-1&0&0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(5;\mathbb{C})$$

und geben Sie eine Matrix $U\in \mathrm{GL}(5,\mathbb{C})$ an, für die $J = U^{-1}\cdot A\cdot U$ ist.

Lösung. Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Es ist

$$\chi_A = \det(X\cdot E_5 - A) = \det \begin{pmatrix} X-1&3&3&4&-6\\ 1&X&-1&-3&3\\ -2&3&X+4&3&-5\\ -2&1&2&X+3&-3\\ -1&1&1&0&X \end{pmatrix}$$

$$= X^5+6X^4+12X^3+8X^2 = X^2\cdot(X+2)^3,$$

d.h. A besitzt einen Eigenwert $\lambda_1 = 0$ der (algebraischen) Multiplizität 2 und einen Eigenwert $\lambda_2 = -2$ der (algebraischen) Multiplizität 3.

Für die lineare Abbildung $\varphi:\mathbb{C}^5\to\mathbb{C}^5$ mit $\mathrm{M}(\varphi)=A$ erhalten wir als Haupträume

$$H_1 := \mathrm{H}(\varphi,0) = \ker(\varphi^2) \quad\text{und}\quad H_2 := \mathrm{H}(\varphi,-2) = \ker\left((\varphi+2\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{C}^5})^3\right).$$

H_1 ist Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4&4&8&8&-12\\ 4&0&-4&-8&8\\ -4&4&8&4&-8\\ -4&0&4&4&-4\\ 0&0&0&-4&4 \end{pmatrix},$$

für den durch leichte Rechnung eine Basis $((0,1,0,1,1),(1,-1,1,0,0))$ gefunden wird. Nun ist die Filtrierung von H_1 durch $\mathbf{0}\subseteq\ker(\varphi)\subseteq\ker(\varphi)^2 = H_1$ zu bestimmen. $\ker(\varphi)$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix A; eine Basis ist durch den Vektor $(1,0,1,1,1)$ gegeben. Wir ergänzen diesen zu einer Basis von $\ker(\varphi^2)$ und erhalten $\boldsymbol{w}_1 := (0,1,0,1,1)$ als zyklischen Vektor im 2-dimensionalen

Hauptraum H_1; er bildet zusammen mit $\boldsymbol{w}_2 := \varphi(\boldsymbol{w}_1) = (-1,0,-1,-1,-1)$ eine zyklische Basis von H_1.

Wir untersuchen nun den Hauptraum H_2. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wird $\psi := \varphi - \lambda_2 \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}^5}$ gesetzt. Wie im ersten Schritt haben wir die Filtrierung von H_2 durch die Unterräume $\ker(\psi^i)$ zu bestimmen, wobei ψ die Matrix

$$A - \lambda_2 \cdot E_4 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & -4 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

besitzt. Es ergeben sich Basen

$$((-1,1,0,0,1),(0,-1,0,1,0),(1,0,1,0,0)) \ \text{ für } \ \ker(\psi^2),$$
$$((-1,1,0,0,1),(1,0,1,0,0)) \ \text{ für } \ \ker(\psi).$$

Wegen $\dim H_2 = 3$ folgt $\ker(\psi^2) = \ker(\psi^3) = H_2$, und zum nilpotenten Endomorphismus $\psi\,|_{H_2}$ gehört die Partition $(2,1)$. Ein zyklischer Vektor der Länge 2 entsteht durch Ergänzung der Basis für $\ker(\psi)$ zu einer Basis für $\ker(\psi^2)$ nach dem Austauschverfahren; wir erhalten $\boldsymbol{w}_3 := (0,-1,0,1,0)$ und $\boldsymbol{w}_4 := \psi(\boldsymbol{w}_3) = (-1,1,0,0,1)$. Entsprechend wird $\boldsymbol{w}_4 \in \ker(\psi)$ durch den Vektor $\boldsymbol{w}_5 := (1,0,1,0,0)$ zu einer Basis von $\ker(\psi)$ ergänzt.

Für die so erhaltene Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4, \boldsymbol{w}_5)$ des 5-dimensionalen Standardraumes ist $J := \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ jordansche Normalform von φ,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U^{-1} \cdot A \cdot U \ \text{ mit } \ U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/4/050
Jordansche Normalform (4), mit Parametern

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, Eigenvektoren einer Matrix, Hauptraum einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Geben Sie eine jordansche Normalform der folgenden Matrix A_t aus $\mathrm{M}(3;\mathbb{R})$ in Abhängigkeit von dem Parameter $t \in \mathbb{R}$ an.

$$A_t = \begin{pmatrix} t+1 & -t+2 & 0 \\ -t+2 & t+1 & 0 \\ -\frac{1}{2}t+2 & -\frac{1}{2}t+1 & t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/4/060
Typen jordanscher Normalformen (1)

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie alle möglichen jordanschen Normalformen von Matrizen mit den Eigenwerten $1, 2, 3$ und den (in entsprechender Reihenfolge auftretenden) algebraischen Vielfachheiten $1, 2$ bzw. 3 bis auf Permutation der Jordanblöcke.

Aufgabe 5/4/070
Typen jordanscher Normalformen (2)

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Klassifizieren Sie alle Matrizen mit dem charakteristischen Polynom

$$\chi(X) = X \cdot (X-1)^2 \cdot (x+1)^3$$

bis auf Ähnlichkeit.

Aufgabe 5/4/080
Typen jordanscher Normalformen (3)

Index: jordansche Normalform einer Matrix, Eigenwerte einer Matrix, charakteristisches Polynom einer Matrix, Minimalpolynom einer quadratischen Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie alle möglichen jordanschen Normalformen von Matrizen mit charakteristischem Polynom $\chi(X) = X^3 \cdot (X-1)^5$ und Minimalpolynom $\mathrm{m}(X) = X^2 \cdot (X-1)^2$.

Aufgabe 5/4/090
Jordansche Normalform (4)

Index: jordansche Normalform einer Matrix, höherer Eigenraum einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie die jordansche Normalform der folgenden Matrix A unter der Voraussetzung, dass $a_{12} \cdot a_{23} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n} \neq 0$ ist.

$$A = \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ & a & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ & & a & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & & & a_{n-1,n} \\ & & & & & a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/4/100
Jordansche Normalform eines Endomorphismus

Index: jordansche Normalform eines Endomorphismus, Eigenwerte eines Endomorphismus, Eigenvektoren eines Endomorphismus, Hauptraum eines Endomorphismus

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{B}$ des Standardraumes $V = \mathbb{R}^5$, bezüglich der die Matrixdarstellung des Endomorphismus $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit

$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$

$$(x_1 - x_2, x_3 + x_4 - 2x_5, x_3 - x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 3x_3 - x_5)$$

eine jordansche Normalform annimmt.

Aufgabe 5/4/110
Jordansche Normalform spezieller Endomorphismen (1)

Index: jordansche Normalform eines Endomorphismus, Eigenwerte eines Endomorphismus, Eigenvektoren eines Endomorphismus, Hauptraum eines Endomorphismus

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Es seien V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft

$$\varphi(\varphi(\boldsymbol{x})) = 2\varphi(\boldsymbol{x}) - 3\boldsymbol{x} \quad \text{für alle} \quad \boldsymbol{x} \in V.$$

Geben Sie alle möglichen jordanschen Normalformen für φ an!

Aufgabe 5/4/120
Jordansche Normalform spezieller Endomorphismen (2)

Index: jordansche Normalform eines Endomorphismus, Eigenwerte eines Endomorphismus, Eigenvektoren eines Endomorphismus, Hauptraum eines Endomorphismus

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

$\varphi : V \to V$ sei linearer Endomorphismus des K-Vektorraumes V mit der folgenden Eigenschaft: Jeder von $\mathbf{0}$ verschiedene Vektor aus V ist Eigenvektor von φ.

Bestimmen Sie eine jordansche Normalform für φ.

Aufgabe 5/4/125 (S: Varianten)
Minimalpolynom (1)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Wir betrachten die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 12 & 8 \\ 8 & 3 & -7 & -6 \\ -16 & -13 & 9 & 10 \\ 12 & 22 & 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_A von A, indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.

Lösung. Offensichtlich ist m_A nicht linear, da A keine Diagonalmatrix ist. Nun testen wir, ob m_A quadratisch ist; dazu muss A^2 plus ein (geeignetes) Vielfaches $u \cdot A$ von A diagonal sein. Wir berechnen leicht $A^2 = 0$, daher ist $f = X^2 \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ ein Polynom mit $f(A) = 0$. Da f normiert ist, folgt $f = \mathrm{m}_A$.

Aufgabe 5/4/126 (S: Varianten)
Minimalpolynom (2)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 6 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_A von A, indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.

(2) Ist A halbeinfach?

Lösung. Offensichtlich ist m_A nicht linear (A ist keine Diagonalmatrix).
Nun testen wir, ob m_A quadratisch ist; dann muss A^2 plus ein (geeignetes) Vielfaches $u{\cdot}A$ von A diagonal sein. $A^2 + u\cdot A = v\cdot \mathrm{E}_4$ entspricht einem einfach auszuwertenden System linearer Gleichungen für u und v; wir schreiben einzelne davon auf und testen durch Einsetzen, ob die Bedingung erfüllt ist. Leicht zeigt sich, dass dies für $u = 2$ der Fall ist, dann ist weiter $v = -4$.
Wir haben so ein nichtkonstantes Polynom $f = X^2 + 2X + 4 \in \mathbb{R}[X]$ minimalen Grades mit $f(A) = 0$ gefunden. Da f normiert ist, folgt $f = \mathrm{m}_A$; dies ist die Antwort auf Frage (1).
Leicht ist zu sehen, dass m_A keine mehrfache Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt, daher ist A eine halbeinfache Matrix.

Aufgabe 5/4/127
Minimalpolynom (3)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Gegeben ist die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & a \\ c & 0 & a & 0 \\ 0 & -a & a & -c \\ -a & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

(1) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m_A von A, indem Sie untersuchen, ob kleine Potenzen der Matrix linear abhängig sind.

(2) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass A halbeinfach ist.

Aufgabe 5/4/128
Minimalpolynom (4)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} u & v & 0 & 1 \\ -\frac{(1+u^2)}{v} & -u & 1 & 0 \\ 0 & 1 & u & \frac{(1+u^2)}{v} \\ 1 & 0 & -v & -u \end{pmatrix}$$
für reelle Zahlen u, $v \neq 0$.

Aufgabe 5/4/130
Jordanform der Ableitung

Index: nilpotente Matrix, jordansche Normalform einer nilpotenten Matrix, zyklischer Unterraum

Stoffeinheiten: 5/3/8 - 5/3/12 Bestimmung der Normalform einer nilpotenten Matrix

P_n bezeichne den Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}[X]$ der Polynome in der Unbestimmten X, deren Grad $\leq n$ ist. Offensichtlich definiert die Ableitung
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X} : P_n \to P_n, \quad f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}$$
einen Endomorphismus von P_n.

Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}$ nilpotent ist und bestimmen Sie eine jordansche Normalform.

Aufgabe 5/4/140 (S: Varianten)
Smithsche Normalform

Index: smithsche Normalform, Präsentationsmatrix einer Matrix, Determinantenteiler einer Matrix, Elementarteiler einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/14 - 5/4/24 Elementarteiler

Bestimmen Sie die Normalform einer Präsentationsmatrix für
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3; \mathbb{F}_2).$$

Lösung. Die charakteristische Matrix ist
$$X \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 1 & X & 1 \\ 0 & 1 & X+1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, \mathbb{F}_2[X]).$$
Nach Vertauschen der ersten beiden Zeilen entsteht eine Matrix
$$B = \begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ X+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & X+1 \end{pmatrix},$$
die an der Position $(1,1)$ einen von 0 verschiedenen Eintrag minimalen Grades besitzt. Durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Zeile von den übrigen ergibt sich daraus eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & X & 1 \\ 0 & X^2+X+1 & X \\ 0 & 1 & X+1 \end{pmatrix},$$

deren erste Spalte bereits die gewünschte Gestalt hat. Sie ist offensichtlich äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & X^2+X+1 & X \\ 0 & 1 & X+1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\mathrm{e}_1(A) = 1$ muss die Teilmatrix

$$C = \begin{pmatrix} X^2+X+1 & X \\ 1 & X+1 \end{pmatrix} \text{ zur Matrix } \begin{pmatrix} \mathrm{e}_2(A) & 0 \\ 0 & \mathrm{e}_3(A) \end{pmatrix}$$

äquivalent sein. Anstatt den obigen Algorithmus fortzusetzen, lassen sich in diesem besonders einfachen Fall auch die größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{d}_3(A)$ und $\mathrm{d}_2(A)$ der äußeren Potenzen $\Lambda^i(C)$ ($i = 2, 1$) schnell bestimmen: Dies sind im ersten Fall die Determinante und im zweiten der ggT aller Einträge von C. So ergeben sich

$$\mathrm{e}_3(A) = \frac{\mathrm{d}_3(A)}{\mathrm{d}_2(A)} = X^3+X+1, \quad \mathrm{e}_2(A) = \mathrm{d}_2(A) = 1$$

und damit die gesuchte Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X^3+X+1 \end{pmatrix}$$

der Präsentationsmatrix für A.

Aufgabe 5/4/141 (S: Varianten)

Smithsche Normalform, Charakteristik 0, Dimension 4

Index: smithsche Normalform, Präsentationsmatrix einer Matrix, Determinantenteiler einer Matrix, Elementarteiler einer Matrix, charakteristische Matrix, Äquivalenz polynomialer Matrizen

Stoffeinheiten: 5/4/14 - 5/4/24 Elementarteiler

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4, \mathbb{Q}).$$

Bestimmen Sie für die Präsentationsmatrix $\mathrm{Char}_A := X \cdot \mathrm{E}_4 - A$ von A die smithsche Normalform, d.h. eine äquivalente polynomiale Matrix $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_4)$ mit normierten Polynomen $f_i \in \mathbb{Q}[X]$, die der Teilbarkeitsbedingung $f_1|f_2|f_3|f_4$ genügen.

Lösung. Die gesuchte Matrix ist zur Matrix

$$\mathrm{Char}_A = \begin{pmatrix} X+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix}$$

äquivalent, sie kann daher durch Aufeinanderfolge von Umformungen der folgenden drei Typen gewonnen werden:

(1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten),

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit einer Zahl aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$,

(3) Addition des p-fachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen, wobei $p \in \mathbb{Q}[X]$.

Im Algorithmus zur Berechnung der smithschen Normalform werden die Diagonalelemente schrittweise berechnet. Dabei entstehen die Matrizen
$M^{(i)} \in \mathrm{M}(5-i, \mathbb{Q}[X])$ mit der Ausgangsmatrix $M^{(1)} := \mathrm{Char}_A$ und mit

$$M^{(i)} \text{ äquivalent } \begin{pmatrix} f_i & 0 \\ 0 & M^{(i+1)} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$. Außerdem teilen die Polynome f_i alle Einträge von $M^{(i+1)}$. Das Polynom f_4 ergibt sich aus $\chi_A = \det(\mathrm{Char}_A)$:

$$f_4 = \det(\mathrm{Char}_A)/(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3).$$

Die oben skizzierten Hauptschritte des Algorithmus können recht komplex sein, doch solange in den Matrizen $M^{(i)}$ Einträge existieren, die auch in $\mathbb{Q}$ liegen, bleibt das Verfahren einfach (ein solches Element teilt alle übrigen). Wir wissen hier bereits $f_i = 1$.
Durch Vertauschen von Zeilen (bzw. Spalten) wird ein Element aus $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ in die Position $(1,1)$ der Matrix $M^{(i)}$ gebracht. Dann werden durch die üblichen Eliminationsschritte mittels (1), (2), (3) die von 0 verschiedenen Elemente der ersten Spalte und der ersten Zeile zu Null reduziert. So gewinnen wir $M^{(i+1)}$.

Wenn wir in $M^{(1)}$ die erste Zeile mit der zweiten Zeile vertauschen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & X-1 & 0 & 0 \\ X+1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix}.$$

Die Elimination der ersten Spalte liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & X-1 & 0 & 0 \\ 0 & -X^2+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix}.$$

Bei Elimination der ersten Zeile mittels der ersten Spalte werden die Elemente unter der ersten Zeile nicht verändert. Damit ist $M^{(2)}$ bereits hier ablesbar, nämlich

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} -X^2+2 & 0 & 0 \\ 0 & X+1 & -1 \\ 0 & -1 & X-1 \end{pmatrix}.$$

Auch in dieser Matrix gibt es noch Elemente, die in $\mathbb{Q}$ liegen, z.B. das Element $m_{23}^{(2)}$. Wir vertauschen so, dass dieses Element in die Position $(1,1)$ der Matrix gerät, und gewinnen (evtl. nach Multiplikation der ersten Zeile mit einer geeigneten Konstanten $\neq 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -X-1 & 0 \\ 0 & 0 & -X^2+2 \\ X-1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Elimination der ersten Spalte ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -X-1 & 0 \\ 0 & 0 & -X^2+2 \\ 0 & X^2-2 & 0 \end{pmatrix},$$

und wir finden analog zum ersten Schritt

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -X^2+2 \\ X^2-2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun liegt kein Element dieser Matrix in $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Wir verzichten hier auf eine Darstellung weiterer Einzelheiten des Verfahrens (vgl. auch 5/4/24). Das Resultat kann jetzt durch einen Kunstgriff gewonnen werden:
Mit $q := X^2 - 2$ gilt

$$M^{(3)} = q \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher teilt q das Polynom f_3 (und damit auch f_4) sowie q^2 das Polynom $\chi_A = \det(\mathrm{Char}_A)$. Wegen $\deg(q^2) = \deg(\chi_A) = 4$ folgt $q = f_3 = f_4$. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^2-2 \end{pmatrix}$$

als smithsche Normalform der gegebenen Matrix Char_A.

Aufgabe 5/4/142 (S: Varianten)
Smithsche Normalform, Charakteristik 5, Dimension 4

Index: smithsche Normalform, Präsentationsmatrix einer Matrix, Determinantenteiler einer Matrix, Elementarteiler einer Matrix, charakteristische Matrix, Äquivalenz polynomialer Matrizen

Stoffeinheiten: 5/4/14 - 5/4/24 Elementarteiler

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4, \mathbb{F}_5).$$

Bestimmen Sie für die Präsentationsmatrix $\mathrm{Char}_A := X \cdot \mathrm{E}_4 - A$ von A die smithsche Normalform, d.h. eine äquivalente polynomiale Matrix $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_4)$ mit normierten Polynomen $f_i \in \mathbb{F}_5[X]$, die der Teilbarkeitsbedingung $f_1 | f_2 | f_3 | f_4$ genügen.

Lösung. Die gesuchte Matrix ist zur Matrix

$$\mathrm{Char}_A = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & X+1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & X & 0 \\ -1 & 1 & 0 & X \end{pmatrix}$$

äquivalent, sie kann daher durch Aufeinanderfolge von Umformungen der folgenden drei Typen gewonnen werden:

(1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten),

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit einer Zahl aus $\mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$,

(3) Addition des p-fachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen, wobei $p \in \mathbb{F}_5[X]$.

Im Algorithmus zur Berechnung der smithschen Normalform werden die Diagonalelemente schrittweise berechnet. Dabei entstehen die Matrizen
$M^{(i)} \in \mathrm{M}(5-i, \mathbb{F}_5[X])$ mit der Ausgangsmatrix $M^{(1)} := \mathrm{Char}_A$ und mit

$$M^{(i)} \text{ äquivalent } \begin{pmatrix} f_i & 0 \\ 0 & M^{(i+1)} \end{pmatrix}$$

für $i = 1, 2, 3$. Außerdem teilen die Polynome f_i alle Einträge von $M^{(i+1)}$. Das Polynom f_4 ergibt sich aus $\chi_A = \det(\mathrm{Char}_A)$:

$$f_4 = \det(\mathrm{Char}_A)/(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3).$$

Die oben skizzierten Hauptschritte des Algorithmus können recht komplex sein, doch solange in den Matrizen $M^{(i)}$ Einträge existieren, die auch in $\mathbb{F}_5$ liegen, bleibt das Verfahren einfach (ein solches Element teilt alle übrigen). Wir wissen hier bereits $f_i = 1$.
Durch Vertauschen von Zeilen (bzw. Spalten) wird ein Element aus $\mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$ in die Position $(1,1)$ der Matrix $M^{(i)}$ gebracht. Dann werden durch die üblichen Eliminationsschritte mittels (1), (2), (3) die von 0 verschiedenen Elemente der ersten Spalte und der ersten Zeile zu Null reduziert. So gewinnen wir $M^{(i+1)}$.
Wenn wir in $M^{(1)}$ die erste Zeile mit der dritten Zeile vertauschen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & X & 0 \\ 0 & X+1 & -1 & -1 \\ X+1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & X \end{pmatrix}.$$

Die Elimination der ersten Spalte liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & X & 0 \\ 0 & X+1 & -1 & -1 \\ 0 & -X-1 & -X^2-X-1 & 1 \\ 0 & 2 & X & X \end{pmatrix}.$$

Bei Elimination der ersten Zeile mittels der ersten Spalte werden die Elemente unter der ersten Zeile nicht verändert. Damit ist $M^{(2)}$ bereits hier ablesbar, nämlich

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} X+1 & -1 & -1 \\ -X-1 & -X^2-X-1 & 1 \\ 2 & X & X \end{pmatrix}.$$

Auch in dieser Matrix gibt es noch Elemente, die in $\mathbb{F}_5$ liegen, z.B. das Element $m_{12}^{(2)}$. Wir vertauschen so, dass dieses Element in die Position $(1,1)$ der Matrix gerät, und gewinnen (evtl. nach Multiplikation der ersten Zeile mit einer geeigneten Konstanten $\neq 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -X-1 & 1 \\ -X^2-X-1 & -X-1 & 1 \\ X & 2 & X \end{pmatrix}.$$

Die Elimination der ersten Spalte ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & -X-1 & 1 \\ 0 & -X^3-2X^2+2X-2 & X^2+X+2 \\ 0 & X^2+X+2 & 0 \end{pmatrix},$$

und wir finden analog zum ersten Schritt

$$M^{(3)} = \begin{pmatrix} -X^3-2X^2+2X-2 & X^2+X+2 \\ X^2+X+2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun liegt kein Element dieser Matrix in $\mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$. Wir verzichten hier auf eine Darstellung weiterer Einzelheiten des Verfahrens (vgl. auch 5/4/24). Das Resultat kann jetzt durch einen Kunstgriff gewonnen werden:
Mit $q := X^2 + X + 2$ gilt

$$M^{(3)} = q \cdot \begin{pmatrix} -X-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher teilt q das Polynom f_3 (und damit auch f_4) sowie q^2 das Polynom $\chi_A = \det(\mathrm{Char}_A)$. Wegen $\deg(q^2) = \deg(\chi_A) = 4$ folgt $q = f_3 = f_4$. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X^2+X+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^2+X+2 \end{pmatrix}$$

als smithsche Normalform der gegebenen Matrix Char_A.

Aufgabe 5/4/143
Smithsche Normalform im Fall einer quadratfreien Determinante

Index: smithsche Normalform, Präsentationsmatrix einer Matrix, Determinantenteiler einer Matrix, Elementarteiler einer Matrix, charakteristische Matrix, Äquivalenz polynomialer Matrizen

Stoffeinheiten: 5/4/14 - 5/4/24 Elementarteiler

$K[X]$ sei der Polynomring über dem Körper K in einer Unbestimmten X. Für Matrizen aus $\mathrm{M}(n, K[X])$ wird folgende Äquivalenzrelation eingeführt. Zwei Matrizen sind äquivalent, wenn sie durch Aufeinanderfolge von Umformungen der folgenden drei Typen ineinander überführt werden können:

(1) Vertauschen zweier Zeilen (bzw. Spalten),

(2) Multiplikation einer Zeile (bzw. Spalte) mit einer Zahl aus $K \setminus \{0\}$,

(3) Addition des p-fachen einer Zeile (bzw. Spalte) zu einer anderen, wobei $p \in K[X]$.

Wir betrachten eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n, K[X])$ mit der nicht konstanten Determinante $\det(A) = d \in K[X]$, wobei die Darstellung der Determinante als Produkt irreduzibler, nicht assoziierter Faktoren $d_i \in K[X]$ die Eigenschaft hat, dass jeder dieser Faktoren nur in der ersten Potenz auftritt.

Zeigen Sie: Alle Matrizen $B \in \mathrm{M}(n, K[X])$ mit $\det(B) = c \cdot d$ und $c \in K^*$ sind im obigen Sinne äquivalent.

Lösung. Die zulässigen Umformungen innerhalb einer Äquivalenzklasse werden durch Multiplikation mit Matrizen gewonnen, deren Determinanten in K^* liegen. Folglich unterscheiden sich die Determinanten der Elemente einer Klasse nur um einen Faktor aus K^*.
Stimmen umgekehrt die Determinanten zweier Matrizen bis auf einen Faktor aus K^* überein, so folgt im Allgemeinen noch nicht, dass sie in der selben Äquivalenzklasse liegen. Um das für unseren Spezialfall zu zeigen, wird die Struktur einer solchen Äquivalenzklasse genauer beschrieben. In jeder gibt es eine Matrix S mit

(a) $S = \mathrm{diag}(f_1, f_2, \ldots, f_n)$,

(b) $f_i | f_{i+1},\ i = 1, \ldots, n-1$,

(c) $\mathrm{LC}(f_i) = 1$.

Wir finden eine solche Matrix entsprechend der smithschen Normalform. Aus (a) folgt unmittelbar

$$\det(S) = \prod_{i=1}^{n} f_i.$$

Aus (b) folgt: f_i ist Faktor von f_{i+1}. Damit ist f_i^{n-i+1} Faktor von $\det(S)$. Für unseren Spezialfall $\det(S) = c' \cdot d$ (mit $c' \in K^*$) folgt $f_i \in K^*$ für $i < n$ (anderenfalls treten polynomiale Faktoren höherer Potenz auf). Unter Verwendung von (c) ergibt sich

$$S = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \mathrm{LC}(d)^{-1} \cdot d),$$

wobei $\mathrm{LC}(d)$ den Leitkoeffizienten des Polynoms d bezeichnet. Alle Matrizen $B \in \mathrm{M}(n, K[X])$ mit $\det(B) = c \cdot d,\ c \in K^*$ sind zu S und damit auch untereinander äquivalent. ❑

Aufgabe 5/4/150
Jordansche Normalform der transponierten Matrix

Index: jordansche Normalform einer Matrix, charakteristische Matrix, äquivalente polynomiale Matrizen

Stoffeinheiten: 5/4/25 - 5/4/28 Ähnlichkeit über dem Grundkörper

Zeigen Sie, dass die jordanschen Normalformen einer komplexen Matrix A und ihrer transponierten Matrix ${}^{\mathrm{t}}A$ übereinstimmen.

Aufgabe 5/4/160
Minimalpolynom, Eigenschaften

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

Es sei $A \in \mathrm{M}(n;\mathbb{C})$ eine invertierbare Matrix. Beweisen Sie, dass für jede Zahl $m \in \mathbb{Z}$ ein Polynom $f_m \in \mathbb{C}[X]$ existiert mit $\deg(f_m) \le n-1$, so dass $A^m = f_m(A)$ ist.

Aufgabe 5/4/170
Einige Eigenschaften des Minimalpolynoms und des charakeristischen Polynoms einer Matrix

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, charakteristisches Polynom einer quadratischen Matrix, jordansche Normalform einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/4/1 - 5/4/13 Normalform eines Endomorphismus

V sei ein K-Vektorraum der endlichen Dimension $n \ge 1$, $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und $U_1,\ U_2$ zwei φ-invariante Unterräume, für die $V = U_1 \bigoplus U_2$ gilt. Mit $\varphi_1 : U_1 \to U_1$ und $\varphi_2 : U_2 \to U_2$ bezeichnen wir die Einschränkungen von φ auf die beiden direkten Summanden, $\chi,\ \chi_1$ bzw. χ_2, bezeichnen die charakteristischen Polynome von $\varphi,\ \varphi_1$ bzw. φ_2 und $\mathrm{m},\ \mathrm{m}_1$ bzw. m_2 die entsprechenden Minimalpolynome aus $K[X]$.

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie

a) immer richtig,

b) immer falsch,

c) in Abhängigkeit von den gegebenen Daten in gewissen Fällen richtig, in anderen falsch ist.

(1) $\chi = \chi_1 \cdot \chi_2$

(2) $\chi = \mathrm{kgV}(\chi_1, \chi_2)$

(3) $\chi = \mathrm{ggT}(\chi_1, \chi_2)$

(4) $\mathrm{m} = \mathrm{m}_1 \cdot \mathrm{m}_2$

(5) $\mathrm{m} = \mathrm{kgV}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$

(6) $\mathrm{m} = \mathrm{ggT}(\mathrm{m}_1, \mathrm{m}_2)$

Aufgabe 5/5/002
Jordanzerlegung (1)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Für die komplexe Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ -9 & 8 & 0 \\ -7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

sind eine diagonalisierbare Matrix B und eine nilpotente Matrix C zu bestimmen, für die $C \cdot B = B \cdot C$ und $A = B + C$ ist.

Aufgabe 5/5/003 (S: Varianten)
Jordanzerlegung (2) (Charakteristik 7)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegung Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7.$$

Lösung. Mit $\mathbb{F}$ bezeichnen wir den Zerfällungskörper des charakteristischen Polynoms der gegebenen Matrix, mit φ den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{F}^4$.
Nun wird A (über $\mathbb{F}$) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir zunächst das charakteristische Polynom $\chi_A = \det(X \cdot$

$E_4 - A) = X^4 + 2X^2 + 1$. Seine Nullstellen liegen offensichtlich nicht in $\mathbb{F}_7$. Es ist aber leicht, den Zerfällungskörper anzugeben; wir erhalten ihn als $\mathbb{F} = \mathbb{F}_7[i]$, wobei i ein algebraisches Element mit dem Minimalpolynom $X^2 + 1$ bezeichnet (dieses Polynom ist über $\mathbb{F}_7$ irreduzibel). Nun ergeben sich für φ die Eigenwerte $\lambda_1 = -i$ und $\lambda_2 = i$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} (i+3) & -1 & 1 & -2 \\ -2 & (i-2) & 1 & 1 \\ -1 & 2 & (i-1) & 3 \\ 0 & 2 & 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = (-(3i+2), 3i, -2, 1)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = ((2i+2), -3, (3i-2), 0)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} (i+3) & -1 & 1 & -2 \\ -2 & (i-2) & 1 & 1 \\ -1 & 2 & (i-1) & 3 \\ 0 & 2 & 0 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(3i+2) \\ 3i \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (-(2i-2), -3, -(3i+2), 0)$$

$$\boldsymbol{v}_4 = ((3i-2), -3i, -2, 1)$$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \boldsymbol{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} (2i+2) & -(3i+2) & -(2i-2) & (3i-2) \\ -3 & 3i & -3 & -3i \\ (3i-2) & -2 & -(3i+2) & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die jordansche Normalform $U^{-1} \cdot A \cdot U = G + F$ der Matrix A über $\mathbb{F}$ mit

$$G = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

G ist eine halbeinfache Matrix, F nilpotent sowie $F \cdot G = G \cdot F$.
Mit $B = U \cdot G \cdot U^{-1}$ und $N = U \cdot F \cdot U^{-1}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

erhalten wir eine Jordanzerlegung für A, d.h. $A = B + N$, wobei B halbeinfach, N nilpotent und $B \cdot N = N \cdot B$ ist.
Wir sehen überdies, dass die Matrizen B, N in $\mathrm{M}(4; \mathbb{F}_7)$ liegen.

Aufgabe 5/5/005
Jordanzerlegung (3)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegungen der folgenden Matrizen.

(1) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5/5/006 (S: Varianten)
Jordanzerlegung (4)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegung der reellen Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat.

Lösung. Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{R}^4$ bezeichnen wir mit φ.
Zunächst wird A (über den komplexen Zahlen, falls erforderlich) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 + 4X^3 + 4X^2 = (X^2 + 2X)^2$$

und erhalten die reellen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = (-1, 1, 0, 0)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = (-5, 0, 2, -2)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (-1, 0, 2, 2)$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (1, 1, 0, 0)$$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \boldsymbol{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die jordansche Normalform $U^{-1} \cdot A \cdot U = G + F$ der Matrix A mit

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist G eine Diagonalmatrix, F nilpotent, sowie $F \cdot G = G \cdot F$.
Mit der diagonalisierbaren Matrix $B = U \cdot G \cdot U^{-1}$ und der nilpotenten Matrix $N = U \cdot F \cdot U^{-1}$ erhalten wir die Jordanzerlegung von A, d.h. $A = B + N$, wobei $B \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ halbeinfach, $N \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ nilpotent, $B \cdot N = N \cdot B$ ist und

$$B = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/007 (S: Varianten)
Jordanzerlegung (5)

Index: Minimalpolynom einer quadratischen Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 5 \\ -2 & -6 & -10 & -5 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis. Das charakteristische Polynom ist ein Quadrat.

Lösung. Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{C}^4$ bezeichnen wir mit φ.

Zunächst wird A (über den komplexen Zahlen) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X{\cdot}E_4 - A) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4 = (X^2 + 2X + 2)^2$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = -1 + i$ und $\lambda_2 = -1 - i$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi, \lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -(i-1) & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(i-5) & 8 & 5 \\ -2 & -6 & -(i+9) & -5 \\ 3 & 4 & 6 & -(i-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = (0, -(i-3), (i-3), 2)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi - \lambda_1 \cdot \mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = ((2i-2), -(9i+4), (5i+4), 0)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -(i-1) & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -(i-5) & 8 & 5 \\ -2 & -6 & -(i+9) & -5 \\ 3 & 4 & 6 & -(i-3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(i-3) \\ (i-3) \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = (-(2i+2), (9i-4), -(5i-4), 0)$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (0, (i+3), -(i+3), 2)$$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \boldsymbol{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} (2i-2) & 0 & -(2i+2) & 0 \\ -(9i+4) & -(i-3) & (9i-4) & (i+3) \\ (5i+4) & (i-3) & -(5i-4) & -(i+3) \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die komplexe jordansche Normalform $U^{-1}\cdot A\cdot U = G+F$ der Matrix A mit

$$G = \begin{pmatrix} (i-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (i-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(i+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(i+1) \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist G eine halbeinfache Matrix, F nilpotent, sowie $F\cdot G = G\cdot F$. Mit der halbeinfachen Matrix $B = U\cdot G\cdot U^{-1}$ und der nilpotenten Matrix $N = U\cdot F\cdot U^{-1}$ erhalten wir die (reelle!) Jordanzerlegung von A, d.h. $A = B+N$, wobei $B\in \mathrm{M}(4;\mathbb{R})$ halbeinfach, $N \in \mathrm{M}(4;\mathbb{R})$ nilpotent, $B\cdot N = N\cdot B$ ist und

$$B = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 17 & 10 \\ -7 & -13 & -21 & -10 \\ 8 & 9 & 13 & 4 \end{pmatrix}, \quad N = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/008 (S: Varianten)

Jordanzerlegung (6)

Index: Minimalpolynom einer Matrix, Jordanzerlegung einer Matrix, nilpotente Matrix, halbeinfache Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/5 - 5/5/7 Jordanzerlegung über den reellen Zahlen

Bestimmen Sie die Jordanzerlegung der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -8 & 4 \\ 14 & 6 & -16 & 12 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Den (bezüglich der Standardbasis) zu A gehörigen Endomorphismus des Standardraumes $\mathbb{C}^4$ bezeichnen wir mit φ.

Zunächst wird A (über den komplexen Zahlen) durch eine Ähnlichkeitstransformation in die jordansche Normalform überführt. Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_4 - A) = X^4 + 8X^2 + 16$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$ der Matrix A, die beide die algebraische Multiplizität 2 haben. Zur Bestimmung einer zyklischen Basis des Hauptraumes $H_1 := \mathrm{H}(\varphi,\lambda_1)$ lösen wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -(2i+4) & 0 & 4 & -6 \\ 0 & -2i & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -(2i+8) & 4 \\ 14 & 6 & -16 & -(2i-12) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix},$$

das den Unterraum $\ker(\varphi-\lambda_1\cdot\mathrm{id}) \subseteq H_1$ beschreibt. Er ist eindimensional und wird von dem Vektor

$$\boldsymbol{v}_2 = ((2i-4), -4i, -2, 2)$$

erzeugt, d.h. $\boldsymbol{v}_2$ ist ein Eigenvektor von A bezüglich λ_1. Nun muss wegen $\dim(H_1) = 2$ jeder Urbildvektor $\boldsymbol{v}_1 \in (\varphi-\lambda_1\cdot\mathrm{id})^{-1}(\boldsymbol{v}_2)$ zusammen mit $\boldsymbol{v}_2$ eine Kette $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ zyklischer Vektoren für H_1 bilden (Beweis?). Wir finden

$$\boldsymbol{v}_1 = (-(4i-3), (4i+4), -(2i-4), 0)$$

als Lösung von

$$\begin{pmatrix} -(2i+4) & 0 & 4 & -6 \\ 0 & -2i & -2 & 2 \\ 6 & 4 & -(2i+8) & 4 \\ 14 & 6 & -16 & -(2i-12) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2i-4) \\ -4i \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend ergeben sich zyklische Vektoren

$$\boldsymbol{v}_3 = ((4i+3), -(4i-4), (2i+4), 0)$$
$$\boldsymbol{v}_4 = (-(2i+4), 4i, -2, 2)$$

für $\mathrm{H}(\varphi, \lambda_2)$ als Lösungen der Gleichungssysteme $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4 = 0$ ($\boldsymbol{v}_4 \neq \boldsymbol{0}$) und $(A - \lambda_2 \cdot \mathrm{E}_4) \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_3 = {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}_4$. Mit der Übergangsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} -(4i-3) & (2i-4) & (4i+3) & -(2i+4) \\ (4i+4) & -4i & -(4i-4) & 4i \\ -(2i-4) & -2 & (2i+4) & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die komplexe jordansche Normalform $U^{-1} \cdot A \cdot U = G + F$ der Matrix A mit

$$G = \begin{pmatrix} 2i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist G eine halbeinfache Matrix, F nilpotent, sowie $F \cdot G = G \cdot F$. Mit der halbeinfachen Matrix $B = U \cdot G \cdot U^{-1}$ und der nilpotenten Matrix $N = U \cdot F \cdot U^{-1}$ erhalten wir die (reelle!) Jordanzerlegung von A, d.h. $A = B + N$, wobei $B \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ halbeinfach, $N \in \mathrm{M}(4; \mathbb{R})$ nilpotent, $B \cdot N = N \cdot B$ ist und

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 & -5 \\ 8 & 4 & -12 & 8 \\ 8 & 5 & -10 & 6 \\ 12 & 5 & -14 & 10 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ -8 & -4 & 10 & -6 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/010 (S: Varianten)

Natürliche Form über $\mathbb{F}_5$ (1)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_5)$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{F}_5[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & X & 0 & 1 \\ 2 & 0 & X+1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & X+1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^3+X^2-X \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher zwei von 1 verschiedene Elementarteiler $\mathrm{e}_3(A) = X-2$, $\mathrm{e}_4(A) = X^3+X^2-X$. Die aus den beiden Begleitmatrizen gebildete Blockdiagonalmatrix B ist die natürliche Form der Matrix A,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/012 (S: Varianten)

Natürliche Form über $\mathbb{F}_5$ (2)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{F}_5)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{F}_5[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X & 2 & -1 & 2 \\ 1 & X+2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & X-2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & X-1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4-X^3+X^2-2 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler $\mathrm{e}_4(A) = X^4 - X^3 + X^2 - 2$, dessen Begleitmatrix $B = \mathrm{B}(\mathrm{e}_4(A))$ in diesem Fall die natürliche Form der Matrix A ist,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/015 (S: Varianten)
Natürliche Form über $\mathbb{F}_5$ (3)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4;\mathbb{F}_5)$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{F}_5[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & X+2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & X-2 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & X-1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4+2X^2-X-2 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler $\mathrm{e}_4(A) = X^4+2X^2-X-2$, dessen Begleitmatrix $B = \mathrm{B}(\mathrm{e}_4(A))$ in diesem Fall die natürliche Form der Matrix A ist,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/020 (S: Varianten)
Natürliche Form über $\mathbb{Q}$ (1)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4;\mathbb{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & -7 \\ 6 & -1 & 1 & -7 \\ 6 & -3 & 3 & -7 \\ 6 & -3 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{Q}[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X-6 & 2 & -3 & 7 \\ -6 & X+1 & -1 & 7 \\ -6 & 3 & X-3 & 7 \\ -6 & 3 & -3 & X+7 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^3+X^2-6X \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher zwei von 1 verschiedene Elementarteiler $\mathrm{e}_3(A) = X-2$, $\mathrm{e}_4(A) = X^3+X^2-6X$. Die aus den beiden Begleitmatrizen gebildete Blockdiagonalmatrix B ist die natürliche Form der Matrix A,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/022 (S: Varianten)

Natürliche Form über $\mathbb{Q}$ (2)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4,\mathbb{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -3 & 1 \\ -5 & -1 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \dots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{Q}[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+2 & -4 & 3 & -1 \\ 5 & X+1 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & X+3 & -4 \\ -3 & -3 & 3 & X+4 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X+4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^3+6X^2+10X+8 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher zwei von 1 verschiedene Elementarteiler $\mathrm{e}_3(A) = X+4$, $\mathrm{e}_4(A) = X^3+6X^2+10X+8$. Die aus den beiden Begleitmatrizen gebildete Blockdiagonalmatrix B ist die natürliche Form der Matrix A,

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/025 (S: Varianten)
Natürliche Form über $\mathbb{Q}$ (3)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4;\mathbb{Q})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{Q}[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X & 1 & -5 & 5 \\ -1 & X+1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & X-5 & 5 \\ 0 & 2 & -7 & X+6 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 4 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler $\mathrm{e}_4(A) = X^4 + 2X^3 + X^2 + X + 4$, dessen Begleitmatrix $B = \mathrm{B}(\mathrm{e}_4(A))$ in diesem Fall die natürliche Form der Matrix A ist,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/030 (S: Varianten)
Natürliche Form über $\mathbb{F}_2$ (1)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4;\mathbb{F}_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{F}_2[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & X+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & X+1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^3+1 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher zwei von 1 verschiedene Elementarteiler $\mathrm{e}_3(A) = X+1$, $\mathrm{e}_4(A) = X^3+1$. Die aus den beiden Begleitmatrizen gebildete Blockdiagonalmatrix B ist die natürliche Form der Matrix A,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/032 (S: Varianten)

Natürliche Form über $\mathbb{F}_2$ (2)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4, \mathbb{F}_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{F}_2[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & X+1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & X+1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & X+1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4+X+1 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler $\mathrm{e}_4(A) = X^4+X+1$, dessen Begleitmatrix $B = \mathrm{B}(\mathrm{e}_4(A))$ in diesem Fall die natürliche Form der Matrix A ist,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/035 (S: Varianten)
Natürliche Form über $\mathbb{F}_2$ (3)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die natürliche Form der Matrix $A \in \mathrm{M}(4; \mathbb{F}_2)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}.$$

Lösung. Wir berechnen zunächst die Elementarteiler $\mathrm{e}_1(A), \ldots, \mathrm{e}_4(A)$ aus $\mathbb{F}_2[X]$. Dazu wird die charakteristische Matrix

$$X \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} X+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X & 1 & 1 \\ 1 & 0 & X & 1 \\ 0 & 1 & 1 & X+1 \end{pmatrix}$$

durch Zeilen- und Spaltenoperationen äquivalent umgeformt. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^4 + X^2 + X + 1 \end{pmatrix}$$

als Normalform einer Präsentationsmatrix für A. Es gibt daher einen einzigen von 1 verschiedenen Elementarteiler $\mathrm{e}_4(A) = X^4 + X^2 + X + 1$, dessen Begleitmatrix $B = \mathrm{B}(\mathrm{e}_4(A))$ in diesem Fall die natürliche Form der Matrix A ist,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5/5/040 (S: Varianten)
Erste, zweite und dritte Normalform einer Matrix (1)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix, Hyperbegleitmatrix, klassische Normalform, primäre Elementarteiler, rationale Normalform einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Normalform einer Matrix mit den nichttrivialen Elementarteilern

$$\mathrm{e}_6 = X - 2,$$

$$e_7 = X^3 - 2X^2 + 9X - 18,$$
$$e_8 = X^4 - 4X^3 + 13X^2 - 36X + 36$$

aus $K[X]$ in jedem der Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$.

Lösung. Die natürliche Form (erste Normalform) ist die aus den Begleitmatrizen $\mathrm{B}(e_8)$, $\mathrm{B}(e_7)$ und $\mathrm{B}(e_6)$ der nichttrivialen Elementarteiler gebildete Blockmatrix, daher in beiden Fällen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -13 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(8, K).$$

Zur Bestimmung der primären Elementarteiler ist über $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$ die Zerlegung der Elementarteiler in irreduzible Faktoren auszuführen. Dies wird durch die Teilbarkeitseigenschaft $e_6 \mid e_7 \mid e_8$ erleichtert. Division von e_7 durch $p := e_6 = X - 2$ ergibt $q := X^2 + 9$, und nach Division von e_8 durch $e_7 = p \cdot q$ folgt $e_8 = p^2 \cdot q$. Offensichtlich sind p und q über $\mathbb{R}$ irreduzibel, daher erhalten wir die primären Elementarteiler (p^2, p, p, q, q). Die aus den Begleitmatrizen dieser Polynome gebildete Blockdiagonalmatrix ist folglich die zweite Normalform (rationale kanonische Form)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im Fall $K = \mathbb{C}$ zerfällt q dagegen in zwei irreduzible Faktoren $q_1 = X + 3i$, $q_2 = X - 3i$, so dass in diesem Fall die primären Elementarteiler durch $(p^2, p, p, q_1, q_1, q_2, q_2)$ gegeben sind. Als zweite Normalform ergibt sich über den komplexen Zahlen daher die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3i \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der dritten Normalform (der klassischen Form) ist nun noch in beiden Fällen der Block $\mathrm{B}(p^2)$ durch die Hyperbegleitmatrix $\mathrm{B}(p, 2)$ zu ersetzen. So entstehen die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-9&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&-9&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-3i&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-3i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&3i&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&3i \end{pmatrix}$$

für $K = \mathbb{R}$ bzw. $K = \mathbb{C}$ (jordansche Normalform).

Aufgabe 5/5/045 (S: Varianten)
Erste, zweite und dritte Normalform einer Matrix (2)

Index: Begleitmatrix, Elementarteiler einer Matrix, nichttriviale Elementarteiler, natürliche Form einer Matrix, Hyperbegleitmatrix, klassische Normalform, primäre Elementarteiler, rationale Normalform einer Matrix

Stoffeinheiten: 5/5/8 - 5/5/15 Natürliche Form, rationale und klassische Normalform

Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Normalform einer Matrix mit den nichttrivialen Elementarteilern

$$\begin{aligned} e_7 &= X - 4,\\ e_8 &= X^3 - 8X^2 + 24X - 32,\\ e_9 &= X^5 - 12X^4 + 64X^3 - 192X^2 + 320X - 256 \end{aligned}$$

aus $K[X]$ in jedem der Fälle $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$.

Lösung. Die natürliche Form (erste Normalform) ist die aus den Begleitmatrizen $\mathrm{B}(e_9)$, $\mathrm{B}(e_8)$ und $\mathrm{B}(e_7)$ der nichttrivialen Elementarteiler gebildete Blockmatrix, daher in beiden Fällen gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 12&1&0&0&0&0&0&0&0\\ -64&0&1&0&0&0&0&0&0\\ 192&0&0&1&0&0&0&0&0\\ -320&0&0&0&1&0&0&0&0\\ 256&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&8&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&-24&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&32&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(9;K).$$

Zur Bestimmung der primären Elementarteiler ist über $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{C}$ die Zerlegung der Elementarteiler in irreduzible Faktoren auszuführen. Dies wird durch die Teilbarkeitseigenschaft $e_7 \,|\, e_8 \,|\, e_9$ erleichtert. Division von e_8 durch $p := e_7 = X - 4$ ergibt $q := X^2 - 4X + 8$, und Division von e_9 durch $e_8 = p{\cdot}q$ ergibt q, d.h. $e_9 = p{\cdot}q^2$.

p ist linear und q hat zwei verschiedene konjugiert komplexe Nullstellen, daher sind p und q über $\mathbb{R}$ irreduzibel. Wir erhalten als primäre Elementarteiler (p, p, p, q^2, q) mit $q^2 = X^4 - 8X^3 + 32X^2 - 64X + 64$. Die aus den Begleitmatrizen dieser Polynome gebildete Blockdiagonalmatrix ist die zweite Normalform (rationale kanonische Form)

$$\begin{pmatrix} 4&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&4&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&8&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-32&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&64&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&-64&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&4&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-8&0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$. Im Fall $K=\mathbb{C}$ zerfällt q dagegen in zwei irreduzible Faktoren $q_1 = X+(2i-2)$, $q_2 = X-(2i+2)$, so dass hier die primären Elementarteiler durch $(p,p,p,q_1^2,q_1,q_2^2,q_2)$, $q_1^2 = X^2+(4i-4)X-8i$, $q_2^2 = X^2-(4i+4)X+8i$ gegeben sind. Als zweite Normalform entsteht über den komplexen Zahlen daher die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&4&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-(4i-4)&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&8i&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-(2i-2)&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&(4i+4)&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&-8i&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&(2i+2) \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der dritten Normalform (der klassischen Form) ist im Fall $K=\mathbb{R}$ der Block $\mathrm{B}(q^2)$ in der zweiten Normalform durch die Hyperbegleitmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{B}(q) & 0\\ M & \mathrm{B}(q) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad M = \begin{pmatrix} 0&0\\ 1&0 \end{pmatrix}$$

zu ersetzen. So entsteht die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&4&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&4&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&4&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&-8&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&4&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&-8&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&4&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&-8&0 \end{pmatrix}.$$

Für $K=\mathbb{C}$ erhalten wir als klassische Form die jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix}
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(2i-2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -(2i-2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -(2i-2) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2i+2) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (2i+2) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (2i+2)
\end{pmatrix}.$$

Aufgaben zum Kapitel 6

Aufgabe 6/1/010 (S: Varianten)
Gleichungen für Unterräume

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Parameterdarstellung eines affinen Unterraumes, Ebene

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

$Y = P + \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w} \subseteq \mathbb{R}^4$ sei eine Parameterdarstellung der Ebene Y im 4-dimensionalen affinen Standardraum, die durch

$$P = (-1, 4, 5, 5)\,,\ \boldsymbol{v} = (2, 3, 0, -1)\,,\ \boldsymbol{w} = (0, -2, 0, 2)$$

gegeben wird. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.

Lösung. Ist $U := \mathrm{T}(Y) = \mathbb{R}\boldsymbol{v} + \mathbb{R}\boldsymbol{w}$ der Translationsraum von Y, so gilt $U = W^{\perp}$, wobei W den Raum derjenigen Linearformen auf $\mathbb{R}^4$ bezeichnet, die auf U verschwinden,

$$W = \{\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^* \mid <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}> = 0\}\,.$$

Schreiben wir (x_1, x_2, x_3, x_4) für das Koordinatenquadrupel eines Vektors $\boldsymbol{u} \in (\mathbb{R}^4)^*$ bezüglich der dualen Basis $(\boldsymbol{e}_1^*, \ldots, \boldsymbol{e}_4^*)$, so ist die Bedingung $\boldsymbol{u} \in W$ dazu äquivalent, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Eine zeilenäquivalente Umformung der Koeffizientenmatrix ergibt die Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aus der sich eine Basis $((0, 0, 1, 0), (-1, 1, 0, 1))$ der Lösungsmenge ablesen lässt. Bezeichnet A die Matrix mit diesen Zeilen, so ist $Ax = A \cdot {}^{\mathrm{t}}P$ ein Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge den Punkt $P \in Y$ enthält und dessen zugehöriges homogenes System die Lösungsmenge $\mathrm{T}(Y) = U$ besitzt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 10 \end{aligned}$$

als lineares Gleichungssystem mit der Lösungsmenge Y.

Aufgabe 6/1/020
Translationen

Index: affiner Raum, affine Abbildung, Translation, Translationsvektorraum eines affinen Raumes

Stoffeinheiten: 6/1/5 - 6/1/9 Affine Abbildungen

$(X, \mathrm{T}(X), \tau)$ sei ein affiner Raum, $f : X \to X$ eine affine Abbildung, für die $\mathrm{T}(f) = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(X)}$ ist.

Beweisen Sie: f ist eine Translation, d.h. es existiert ein Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(X)$, für den $f = \tau_{\boldsymbol{v}}$ gilt ($\tau_{\boldsymbol{v}}$ ist hierbei – wie üblich – die durch $\boldsymbol{v}$ definierte Translationsabbildung $\tau_{\boldsymbol{v}} : X \to X\,,\ P \mapsto P + \boldsymbol{v}$).

Aufgabe 6/1/030 (S: Varianten)
Parameterdarstellung für Unterräume

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Parameterdarstellung eines affinen Unterraumes, affines Erzeugendensystem

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Wir betrachten den Unterraum Y des affinen Standardraumes $\mathbb{R}^4$, der durch das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 &= -10 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 &= 8 \end{aligned}$$

gegeben ist.

(1) Beschreiben Sie Y in Parameterform.
(2) Geben Sie ein affines Erzeugendensystem für Y an.

Lösung. Mit dem gaußschen Algorithmus ist für das Gleichungssystem leicht die Lösungsmenge

$$Y = \{(-14,6,0,0) + t_1\cdot(-8,5,1,0) + t_2\cdot(-12,9,0,1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

zu finden. Aus der Parameterdarstellung $Y = P + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2$ mit

$$P = (-14,6,0,0), \quad \boldsymbol{v}_1 = (-8,5,1,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (-12,9,0,1)$$

erhalten wir ein affines Erzeugendensystem $\{P, P_1, P_2\}$, wobei

$$P_1 = P + \boldsymbol{v}_1 = (-22,11,1,0), \quad P_2 = P + \boldsymbol{v}_2 = (-26,15,0,1)$$

gewählt wurden.

Anmerkung. Offensichtlich ist $\{P, P_1, P_2\}$ sogar eine affine Basis des Unterraumes Y. Dies ist immer der Fall, wenn wir in vertrauter Weise mit dem gaußschen Algorithmus vorgehen.

Aufgabe 6/1/040 (S: Varianten)
Affine Basen für Unterräume (1)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, affine Basis, affines Erzeugendensystem, Verbindungsraum

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Im affinen Standardaum $\mathbb{R}^4$ wird der Unterraum Y_1 durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 30 \end{aligned}$$

und der Unterraum Y_2 durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 15 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

gegeben.

Bestimmen Sie für Y_1, $Y_1 \cap Y_2$, $Y_1 \vee Y_2$ je eine affine Basis!

Lösung. Mit dem gaußschen Algorithmus ist für das erste Gleichungssystem leicht die Lösungsmenge

$$Y_1 = \{(7,-9,0,0) + t_1\cdot(2,0,3,0) + t_2\cdot(1,-3,0,3) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$$

zu finden. Aus der Parameterdarstellung $Y_1 = P + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{v}_2$ mit

$$P = (7,-9,0,0), \quad \boldsymbol{v}_1 = (2,0,3,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,-3,0,3)$$

erhalten wir eine affine Basis $\{P, P_1, P_2\}$, wobei

$$P_1 = P + \boldsymbol{v}_1 = (9,-9,3,0), \quad P_2 = P + \boldsymbol{v}_2 = (8,-12,0,3)$$

gewählt wurden.
Nun wird der Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ bestimmt. Wir erhalten ihn durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -6 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 30 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 15 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

(gebildet aus den Gleichungen für Y_1 und Y_2). Die Lösungsmenge ist

$$Y_1 \cap Y_2 = \{(4,-6,-3,-3)\},$$

und dieser Punkt ist gleichzeitig eine affine Basis des Unterraumes $Y_1 \cap Y_2$.

Zur Bestimmung einer affinen Basis für $Y_1 \vee Y_2$ erinnern wir an die Dimensionsformel für den Verbindungsraum. Sie lautet (für $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$)

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2),$$

woraus wegen $\dim(Y_1) = \dim(Y_2) = 2$ und $\dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$ sofort $\dim(Y_1 \vee Y_2) = 4$, d.h. $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{R}^4$ folgt. Affine Basis von $Y_1 \vee Y_2$ ist daher jede beliebige affine Basis des Raumes $\mathbb{R}^4$, beispielsweise die Standardbasis

$$((0,0,0,0), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)).$$

Aufgabe 6/1/045 (S: Varianten)
Affine Basen für Unterräume (2)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, affine Basis, affines Erzeugendensystem, Verbindungsraum

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Im affinen Standardaum $\mathbb{F}_3^4$ wird der Unterraum Y_1 durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

und der Unterraum Y_2 durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

gegeben. Bestimmen Sie für Y_1, $Y_1 \cap Y_2$, $Y_1 \vee Y_2$ je eine affine Basis!

Lösung. Mit dem gaußschen Algorithmus ist für das erste Gleichungssystem leicht die Lösungsmenge

$$Y_1 = \{(-1,0,0,0) + t_1\cdot(1,1,0,0) + t_2\cdot(-1,0,1,1) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{F}_3\}$$

zu finden. Aus der Parameterdarstellung $Y_1 = P + \mathbb{F}_3\boldsymbol{v}_1 + \mathbb{F}_3\boldsymbol{v}_2$ mit

$$P = (-1,0,0,0), \quad \boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0), \quad \boldsymbol{v}_2 = (-1,0,1,1)$$

erhalten wir eine affine Basis $\{P, P_1, P_2\}$, wobei

$$P_1 = P + \boldsymbol{v}_1 = (0,1,0,0)\,, \quad P_2 = P + \boldsymbol{v}_2 = (1,0,1,1)$$

gewählt wurden.
Nun wird der Durchschnitt $Y_1 \cap Y_2$ bestimmt. Wir erhalten ihn durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 - x_4 &= -1 \end{aligned}$$

(gebildet aus den Gleichungen für Y_1 und Y_2). Die Lösungsmenge ist

$$Y_1 \cap Y_2 = \{\,(1,1,-1,-1)\,\},$$

und dieser Punkt bildet gleichzeitig eine affine Basis des Unterraumes $Y_1 \cap Y_2$.
Zur Bestimmung einer affinen Basis für $Y_1 \vee Y_2$ erinnern wir an die Dimensionsformel für den Verbindungsraum. Sie lautet (für $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$)

$$\dim(Y_1 \vee Y_2) = \dim(Y_1) + \dim(Y_2) - \dim(Y_1 \cap Y_2),$$

woraus wegen $\dim(Y_1) = \dim(Y_2) = 2$ und $\dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$ sofort $\dim(Y_1 \vee Y_2) = 4$, d.h. $Y_1 \vee Y_2 = \mathbb{F}_3^4$ folgt. Affine Basis von $Y_1 \vee Y_2$ ist daher jede beliebige affine Basis des Raumes $\mathbb{F}_3^4$, beispielsweise die kanonische Basis

$$((0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).$$

Aufgabe 6/1/050 (S: Varianten)
Parallelität, Unterräume in Parameterform (Charakteristik 2)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Parameterdarstellung eines affinen Unterraumes, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Standardraum $\mathbb{F}_2^5$ sind die Unterräume

$$\begin{aligned} Y &:= P + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_1 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_2 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{y}_3\,, \\ Z &:= Q + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_1 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_2 + \mathbb{F}_2 \cdot \boldsymbol{z}_3 \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} &P = (0,1,0,0,1), \quad Q = (1,1,1,1,1)\,, \\ &\boldsymbol{y}_1 = (1,1,1,0,1), \quad \boldsymbol{y}_2 = (1,0,0,1,1), \quad \boldsymbol{y}_3 = (0,1,0,0,1), \\ &\boldsymbol{z}_1 = (0,1,1,1,0), \quad \boldsymbol{z}_2 = (1,1,0,1,0), \quad \boldsymbol{z}_3 = (0,0,1,1,1) \end{aligned}$$

gegeben. Stellen Sie fest, ob Y und Z parallel sind.

Lösung. Der Translationsraum $\mathrm{T}(Y)$ ist von den Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $\mathrm{T}(Z)$ von den Vektoren $\boldsymbol{z}_j$ ($1 \leq i,j \leq 3.$)
Werden $\boldsymbol{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ und $\boldsymbol{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\mathrm{rang}(A,B) = \mathrm{rang}(A)$ oder $\mathrm{rang}(A,B) = \mathrm{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

durch den gaußschen Algorithmus umgeformt. Wir erhalten eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1\,1\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}.$$

So folgt $\operatorname{rang}(A) = 3$ und $\operatorname{rang}(A,B) = 3$, daher $Y \,||\, Z$.

Aufgabe 6/1/060 (S: Varianten)

Parallelität, Unterräume in Parameterform (Charakteristik 0)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Parameterdarstellung eines affinen Unterraumes, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Standardraum $\mathbb{R}^5$ sind die Unterräume

$$Y := P_0 + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{P_0P_1} + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{P_0P_2} + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{P_0P_3}\,,$$
$$Z := Q_0 + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} + \mathbb{R}_2 \cdot \overrightarrow{Q_0Q_2}$$

durch die folgenden Punkte

$$P_0 = (3,-1,3,3,-3),\quad P_1 = (3,1,-5,0,-6),$$
$$P_2 = (7,1,1,2,-6),\quad P_3 = (6,0,3,3,-4),$$
$$Q_0 = (3,5,-2,0,1),\quad Q_1 = (0,6,-3,0,1),,$$
$$Q_2 = (-6,7,-5,1,1)$$

gegeben. Stellen Sie fest, ob Y und Z parallel sind.

Lösung. Der Translationsraum $\mathrm{T}(Y)$ wird von den Vektoren $\boldsymbol{y}_i := \overrightarrow{P_0P_i}$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $\mathrm{T}(Z)$ von den Vektoren $\boldsymbol{z}_j := \overrightarrow{Q_0Q_j}$ $(1 \le i \le 3, 1 \le j \le 2)$:

$$\boldsymbol{y}_1 = (0,2,-8,-3,-3),\quad \boldsymbol{y}_2 = (4,2,-2,-1,-3)$$
$$\boldsymbol{y}_3 = (3,1,0,0,-1),$$
$$\boldsymbol{z}_1 = (-3,1,-1,0,0),\quad \boldsymbol{z}_2 = (-9,2,-3,1,0)$$

Werden die Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{R})$ und die Vektoren $\boldsymbol{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B \in \mathrm{M}(5,2;\mathbb{R})$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\operatorname{rang}(A,B) = \operatorname{rang}(A)$ oder $\operatorname{rang}(A,B) = \operatorname{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & -3 & -9 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -8 & -2 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch den gaußschen Algorithmus umgeformt. Es ergibt sich eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 15 & 37 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

So folgt $\operatorname{rang}(A) = 3$ und $\operatorname{rang}(A, B) = 5$, Parallelität kann daher nur vorliegen, wenn $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(A, B)$ ist. Da B nur zwei Spalten besitzt, ist jedoch $\operatorname{rang}(B) \leq 2$. Damit sind die Unterräume Y und Z nicht parallel.

Aufgabe 6/1/070 (S: Varianten)

Parallelität (Charakteristik 2)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Verbindungsraum, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Standardraum $\mathbb{F}_2^5$ sind die Unterräume $Y := P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3$ und $Z := Q_0 \vee Q_1 \vee Q_2 \vee Q_3$ durch die folgenden Punkte

$$\begin{aligned} &P_0 = (1,1,0,0,1), \quad P_1 = (0,0,1,0,1), \\ &P_2 = (0,0,1,0,0), \quad P_3 = (0,1,0,1,0), \\ &Q_0 = (0,0,1,1,1), \quad Q_1 = (0,0,1,1,0), \\ &Q_2 = (0,1,0,0,1), \quad Q_3 = (1,0,1,0,1) \end{aligned}$$

gegeben. Stellen Sie fest, ob Y und Z parallel sind.

Lösung. Der Translationsraum $\mathrm{T}(Y)$ wird von den Vektoren $\boldsymbol{y}_i := \overrightarrow{P_0P_i}$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $\mathrm{T}(Z)$ von den Vektoren $\boldsymbol{z}_j := \overrightarrow{Q_0Q_j}$ ($1 \leq i, j \leq 3$):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y}_1 = (1,1,1,0,0), \quad \boldsymbol{y}_2 = (1,1,1,0,1) \\ &\boldsymbol{y}_3 = (1,0,0,1,1), \quad \boldsymbol{z}_1 = (0,0,0,0,1) \\ &\boldsymbol{z}_2 = (0,1,1,1,0), \quad \boldsymbol{z}_3 = (1,0,0,1,0) \end{aligned}$$

Werden die Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ und die Vektoren $\boldsymbol{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B \in \mathrm{M}(5,3;\mathbb{F}_2)$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\operatorname{rang}(A, B) = \operatorname{rang}(A)$ oder $\operatorname{rang}(A, B) = \operatorname{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

durch den gaußschen Algorithmus umgeformt. Wir erhalten eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

So folgt $\operatorname{rang}(A) = 3$ und $\operatorname{rang}(A, B) = 3$, daher $Y \,||\, Z$.

Aufgabe 6/1/080 (S: Varianten)
Parallelität (Charakteristik 0)

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Verbindungsraum, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Standardraum $\mathbb{R}^5$ sind die Unterräume $Y := P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3$ und $Z := Q_0 \vee Q_1 \vee Q_2$ durch die folgenden Punkte

$P_0 = (-3, -5, -1, 0, -3)$, $P_1 = (0, -3, -2, 5, -5)$,
$P_2 = (-2, -7, -6, -3, -3)$, $P_3 = (-1, -8, -7, -2, -1)$,
$Q_0 = (-1, 1, 2, 1, 2)$, $Q_1 = (-5, -1, -2, 5, 0)$,,
$Q_2 = (4, 2, 3, -2, 4)$

gegeben. Stellen Sie fest, ob Y und Z parallel sind.

Lösung. Der Translationsraum $\mathrm{T}(Y)$ wird von den Vektoren $\boldsymbol{y}_i := \overrightarrow{P_0P_i}$ erzeugt, entsprechend der Translationsraum $\mathrm{T}(Z)$ von den Vektoren $\boldsymbol{z}_j := \overrightarrow{Q_0Q_j}$ ($1 \le i \le 3, 1 \le j \le 2$):

$\boldsymbol{y}_1 = (3, 2, -1, 5, -2)$, $\boldsymbol{y}_2 = (1, -2, -5, -3, 0)$
$\boldsymbol{y}_3 = (2, -3, -6, -2, 2)$,
$\boldsymbol{z}_1 = (-4, -2, -4, 4, -2)$, $\boldsymbol{z}_2 = (5, 1, 1, -3, 2)$

Werden die Vektoren $\boldsymbol{y}_i$ als Spalten einer Matrix $A \in \mathrm{M}(5, 3; \mathbb{R})$ und die Vektoren $\boldsymbol{z}_j$ als Spalten einer Matrix $B \in \mathrm{M}(5, 2; \mathbb{R})$ gewählt, so ist offenbar Y genau dann zu Z parallel, wenn $\operatorname{rang}(A, B) = \operatorname{rang}(A)$ oder $\operatorname{rang}(A, B) = \operatorname{rang}(B)$ ist. Um dies zu prüfen, wird die Matrix

$$(A, B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & -6 & -4 & 1 \\ 5 & -3 & -2 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

durch den gaußschen Algorithmus umgeformt. Es ergibt sich eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 8 & 13 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & -26 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

So folgt $\operatorname{rang}(A) = 3$ und $\operatorname{rang}(A, B) = 5$, Parallelität kann daher nur vorliegen, wenn $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(A, B)$ ist. Da B nur zwei Spalten hat, ist jedoch $\operatorname{rang}(B) \le 2$. Damit sind die Unterräume Y und Z nicht parallel.

Aufgabe 6/1/090
Parallelität

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Verbindungsraum, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Raum $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden G_1 und G_2 gegeben, wobei

a) $G_1 := (1,1,1) \vee (2,1,1)$, $G_2 := (1,0,1) \vee (11,2,1)$ bzw.

b) G_1 wie zuvor, $G_2 := (1,3,3) \vee (2,5,3)$ bzw.

c) G_1 wie zuvor, $G_2 := (9,1,4) \vee (1,1,4)$ ist.

(1) Bestimmen Sie in jedem der Fälle $G_1 \cap G_2$ und entscheiden Sie, ob die Geraden parallel sind.

(2) Es sei E die Ebene, die durch die Gleichung $x+y+z=1$ gegeben ist. Bestimmen Sie den Durchschnitt $G_1 \cap E$. Ist E parallel zu G_1?

Aufgabe 6/1/100
Satz von Pappus-Pascal

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Verbindungsraum, parallele Unterräume

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Im affinen Raum A sind die Geraden G, H gegeben, für die $G \cap H = \{P\}$ ein Punkt ist sowie Punkte $A_1, A_2, A_3 \in G$, $B_1, B_2, B_3 \in H$ mit $A_i \neq P$, $B_j \neq P$ für $i, j = 1 \ldots 3$. Wir setzen voraus $A_1 \vee B_2 \parallel A_2 \vee B_1$ und $A_2 \vee B_3 \parallel A_3 \vee B_2$. Zeigen Sie, dass dann $A_1 \vee B_3 \parallel A_3 \vee B_1$ gilt.

Aufgabe 6/1/110
Eigenschaften affiner Unterräume

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Verbindungsraum, Dimension eines affinen Raumes

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Wir betrachten im affinen Raum X die Punkte $P_0, \ldots, P_r$, von denen wir voraussetzen, dass sie nicht in einem $(r-1)$-dimensionalen Teilraum liegen. Beweisen Sie: Es gibt genau einen r-dimensionalen Teilraum von X, der alle Punkte P_i enthält.

Aufgabe 6/1/120
Lage von Geraden im Raum

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, parallele Unterräume, Gerade

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Wir betrachten im affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ zwei Geraden G_i, die durch Gleichungen

$$G_1: \quad a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1\,, \quad a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$G_2: \quad a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3\,, \quad a_{41}X_1 + a_{42}X_2 + a_{43}X_3 = b_4$$

gegeben sind (es wird nicht behauptet, dass a_{ij} dann beliebig sein dürfen). Beschreiben Sie die Lage beider Geraden zueinander in Abhängigkeit von $\mathrm{rang}(A)$ und $\mathrm{rang}(A')$, wobei $A = (a_{ij})$ und A' die um die Spalte ${}^{\mathrm{t}}(b_1, b_2, b_3, b_4)$ erweiterte Matrix A ist.

Aufgabe 6/1/130

Anzahl affiner Unterräume des Standardraumes $\mathbb{F}_2^3$

Index: affiner Raum, affiner Unterraum

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

$A := (\mathbb{F}_2)^3$ sei der affine Standardraum über dem zweielementigen Körper $\mathbb{F}_2$.

(1) Wieviele Punkte hat A?

(2) Wieviele Geraden enthält A?

(3) Wieviele Ebenen enthält A?

Aufgabe 6/1/140

Gleichungssystem für eine Gerade

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Verbindungsraum, Gerade

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Im affinen Raum $\mathbb{R}^4$ wird durch $G = (1, 2, 3, 4) \vee (2, 2, 4, 5)$ eine Gerade gegeben. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das G beschreibt!

Aufgabe 6/1/150

Gleichungssysteme für Unterräume

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Parameterdarstellung eines affinen Unterraumes, Verbindungsraum

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Wir betrachten im affinen Raum $\mathbb{R}^4$ die folgenden Teilräume P, G, F, R. Bestimmen Sie jeweils ein Gleichungssystem, das den entsprechenden Teilraum als Lösungsmenge hat!

(1) $R = (3, 1, 2, 4) + \mathbb{R} \cdot (1, 1, 1, 1) + \mathbb{R} \cdot (1, 2, 1, 2) + \mathbb{R} \cdot (2, 3, 1, 3)$

(2) $F = (2, 1, 1, 2) \vee (1, 2, 1, 1) \vee (1, 0, 3, 3)$

(3) $G = (1, 0, 0, 1) \vee (3, 4, 1, 2)$

(4) $P = \{(1, 2, 1, 3)\}$

Aufgabe 6/1/160 (S: Varianten)

Hyperebenen und Determinanten

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Verbindungsraum

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

$X = K^n$ sei der n-dimensionale affine Standardraum über dem Körper K, $P_1, \ldots, P_n \in X$ mit $\dim(P_1 \vee \ldots \vee P_n) = n - 1$, d.h. $Y = P_1 \vee \ldots \vee P_n$ ist eine Hyperebene.

(1) Zeigen Sie, dass mit $P_i = (p_{i1}, \ldots, p_{in})$ durch

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n & 1 \\ p_{11} & \ldots & p_{1n} & 1 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \ldots & p_{nn} & 1 \end{pmatrix} = 0$$

eine Gleichung mit der Lösungsmenge Y gegeben ist.

(2) Im affinen Raum $\mathbb{R}^3$ sei $Y = (1,-4,0) \vee (4,-7,1) \vee (-2,-6,-2)$.
Bestimmen Sie mittels (1) eine Gleichung für Y.

Lösung für Teil (2). Offensichtlich ist

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 1 & 1 \\ -2 & -6 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 8x_1 + 3x_2 - 15x_3 + 4 = 0$$

die gesuchte Gleichung.

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, dass die gegebenen Punkte affin unabhängig sind. Allerdings ist es unnötig, das zu prüfen, denn im Fall affiner Abhängigkeit müsste die angegebene Determinante identisch verschwinden.

Aufgabe 6/1/170
Existenz affiner Abbildungen (1)

Index: affiner Raum, affine Abbildung, linearer Anteil einer affinen Abbildung
Stoffeinheiten: 6/1/5 - 6/1/9 Affine Abbildungen

Existieren affine Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzw. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die nachfolgend angegebene Bedingungen erfüllen?

(1) $f(1,1) = (0,1),\ f(3,2) = (1,2),\ f(5,3) = (2,3)$,

(2) $g(1,1) = (0,1),\ g(3,2) = (1,2),\ g(5,3) = (2,2)$.

Aufgabe 6/1/180 (S: Varianten)
Fixpunkte affiner Abbildungen in der Charakteristik 3

Index: affiner Raum, affine Abbildung, Fixpunkt

Stoffeinheiten: 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen

Bestimmen Sie die Menge $\mathrm{Fix}(f)$ der Fixpunkte der folgendermaßen gegebenen affinen Abbildung $f : \mathbb{F}_3^4 :\to \mathbb{F}_3^4$ des affinen Standardraumes $\mathbb{F}_3^4$ in sich.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) := \\ (x_1 - x_2 + x_3 - 1, x_1 + x_3 + x_4 + 1, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_4 - 1)$$

Lösung. $\mathrm{Fix}(f)$ ist die Menge aller $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{F}_3^4$, für die

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_4)$$

gilt, daher die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des Systems ist

$$\{(-t_2+1, t_1-1, t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \text{ Parameter }\}.$$

Aufgabe 6/1/190 (S: Varianten)
Fixpunkte affiner Abbildungen (Charakteristik 0, Dimension 4)

Index: affiner Raum, affine Abbildung, Fixpunkt, affiner Unterraum, Dimension eines affinen Raumes

Stoffeinheiten: 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen

Bestimmen Sie die Dimension des affinen Unterraumes $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathbb{Q}^4$ aller Fixpunkte der folgendermaßen gegebenen affinen Abbildung $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ des affinen Standardraumes $\mathbb{Q}^4$ in sich.

$$^{\mathrm{t}}f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Lösung. $\mathrm{Fix}(f)$ ist die Menge aller $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Q}^4$, für die

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_4)$$

gilt, daher die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & -3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Durch den gaußschen Algorithmus kann diese in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -9 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

überführt werden, daher stimmt der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix überein (beide haben den Rang 3), und es folgt $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 4 - 3 = 1$.

Aufgabe 6/1/200 (S: Varianten)
Fixpunkte affiner Abbildungen (Charakteristik 0, Dimension 3) (1)

Index: affiner Raum, affine Abbildung, Fixpunkt, affiner Unterraum, Dimension eines affinen Raumes

Stoffeinheiten: 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen

Bestimmen Sie die Dimension des affinen Unterraumes $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathbb{Q}^3$ aller Fixpunkte der folgendermaßen gegebenen affinen Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ des affinen Standardraumes $\mathbb{Q}^3$ in sich.

$$^{\mathrm{t}}f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 9 \\ -1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung. $\mathrm{Fix}(f)$ ist die Menge aller $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3$ mit der Eigenschaft $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, daher Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -7 & 9 & 6 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Durch den gaußschen Algorithmus kann diese in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -4 & -7 & 9 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

überführt werden, daher stimmt der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix überein (beide haben den Rang 2), und es folgt $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, $\dim(\mathrm{Fix}(f)) = 3 - 2 = 1$.

Aufgabe 6/1/210 (S: Varianten)
Fixpunkte affiner Abbildungen (Charakteristik 0, Dimension 3) (2)

Index: affiner Raum, affine Abbildung, Fixpunkt, affiner Unterraum, Dimension eines affinen Raumes

Stoffeinheiten: 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen

Bestimmen Sie den Unterraum $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathbb{Q}^3$, der aus den Fixpunkten der nachfolgend angegebenen affinen Abbildung $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ besteht.

$${}^{\mathrm{t}}f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 18 & -8 & 6 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösung. $\mathrm{Fix}(f)$ ist die Menge aller $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3$ mit der Eigenschaft $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, daher Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 18 & -9 & 6 & -15 \\ 3 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Durch den gaußschen Algorithmus kann diese in eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

überführt werden, aus der sich leicht die Lösungsmenge ablesen lässt,

$$\mathrm{Fix}(f) = \{(-\frac{7}{3}, -3, 0) + t \cdot (-4, -6, 3) \mid t \in \mathbb{Q}\}.$$

Aufgabe 6/1/220
Projektionen

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, affine Abbildung, Projektion, affine Koordinaten, Verbindungsraum

Stoffeinheiten: 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen

X sei der affine Standardraum $\mathbb{R}^3$ und $f : X \to X$ die affine Abbildung, die durch Projektion von X auf die Gerade $G = P \vee Q$ längs der Ebene $E = R \vee S \vee T$ entsteht, wobei

$$P = (1,2,4),\ Q = (3,6,2),\ R = (1,1,0),\ S = (2,1,1),\ T = (2,2,1)$$

ist. Geben Sie f in affinen Koordinaten bezüglich der Standardbasis an.

Aufgabe 6/1/230
Komplexe Konjugation als Kollineation

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Gerade, affine Abbildung

Stoffeinheiten: 6/1/5 - 6/1/9 Affine Abbildungen

$A := \mathbb{C}^n$ sei der affine Standardraum über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, $f : A \longrightarrow A$ die durch $f(z_1, \dots, z_n) := (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n)$ (komplexe Konjugation) gegebene Abbildung.

(1) Zeigen Sie: f ist Kollineation (d.h. jede Gerade $G \subseteq A$ wird durch f auf eine Gerade $f(G)$ abgebildet).

(2) Ist f eine affine Abbildung?

Aufgabe 6/1/240
Existenz affiner Abbildungen (2)

Index: affiner Raum, affine Abbildung, linearer Anteil einer affinen Abbildung

Stoffeinheiten: 6/1/5 - 6/1/9 Affine Abbildungen

Zeigen Sie, dass es eine affine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, für die

$$f(1,1,1) = (1,0,1) \quad f(1,0,1) = (1,1,1)$$
$$f(0,1,1) = (0,0,0) \quad f(1,0,0) = (0,1,0)$$

ist, und geben sie $A \in M(3,3)$, $b \in M(3,1)$ an, so dass für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ stets ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{y} = A \cdot {}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} + b$ gilt.

Aufgabe 6/1/250
Affine Basen und Koordinaten

Index: affiner Raum, affine Abbildung, affine Basis, Koordinatentransformation

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Wir betrachten den affinen Standardraum $X = \mathbb{R}^3$.

(1) Zeigen Sie: $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ mit
$$P_0 := (1,1,0)\,,\ P_1 := (1,2,1)\,,\ P_2 := (2,3,1)\,,\ P_3 := (2,3,3)$$
ist eine affine Basis von X.

(2) Durch $2x + 3y - 4z = 3$ wird eine Ebene E in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie eine Gleichung für E im Koordinatensystem $\mathcal{B}$.

Aufgabe 6/1/260 (S: Varianten)
Affine Formen von Quadriken

Index: affiner Raum, Quadrik, Hauptachsenpolynome reeller Quadriken, affine Transformation, Koordinatentransformation

Stoffeinheiten: 6/1/28 - 6/1/30 Affine Quadriken

Bestimmen Sie eine Hauptachsenform für das reelle quadratische Polynom

$$f = X_1^2 - 2X_1X_2 + 2X_1X_3 + 2X_2X_3 - 3X_3^2 - 6X_3 + 6$$

und geben Sie die zugehörige affine Transformation der Unbestimmten an.

Lösung. Durch quadratische Ergänzung erhalten wir

$$\begin{aligned} f &= (X_1 - X_2 + X_3)^2 - X_2^2 + 4X_2X_3 - 4X_3^2 - 6X_3 + 6 \\ &= (X_1 - X_2 + X_3)^2 - (X_2 - 2X_3)^2 - 6X_3 + 6, \end{aligned}$$

d.h. mittels der Substitution

$$Y_1 := X_1 - X_2 + X_3, \quad Y_2 := X_2 - 2X_3, \quad Y_3 := 3X_3$$

bekommt das gegebene Polynom die folgende Gestalt

$$f = Y_1^2 - Y_2^2 - 2Y_3 + 6.$$

Daraus ergibt sich nach Transformation des Koordinatenursprungs mittels

$$Z_1 := Y_1, \quad Z_2 := Y_2, \quad Z_3 := Y_3 - 3$$

offensichtlich

$$f = Z_1^2 - Z_2^2 - 2Z_3.$$

Dies ist bereits die Hauptachsenform. Durch Einsetzen erhalten wir die zugehörige affine Transformationen

$$Z_1 = X_1 - X_2 + X_3, \quad Z_2 = X_2 - 2X_3, \quad Z_3 = 3X_3 - 3.$$

Anmerkung. Das Verfahren gestaltet sich im vorliegenden Fall besonders einfach, da in den Teilschritten Monome vom Typ X_i^2 auftreten. Anderenfalls kann analog vorgegangen werden, nachdem beispielsweise zunächst ein Term X_1X_2 durch die Transformation $X_1 = Y_1 + Y_2$, $X_2 = Y_2$ in eine entsprechende Form gebracht wird.

Aufgabe 6/1/270
Existenz von Fixpunkten (1)

Index: affiner Raum, affine Abbildung, Fixpunkt

Stoffeinheiten: 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen

$f : X \to X$ sei eine affine Abbildung, für die $\mathrm{T}(f) = \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{T}}(X)$ ist sowie $\lambda \in K$, $\lambda \neq 1$. Beweisen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. dass ein Punkt $P \in X$ existiert, für den $f(P) = P$ ist.

Aufgabe 6/1/280
Existenz von Fixpunkten (2)

Index: affiner Raum, affine Abbildung, Fixpunkt

Stoffeinheiten: 6/1/31 - 6/1/33 Einige Eigenschaften affiner Abbildungen

Es sei X ein affiner Raum über einem Körper K, dessen Charakteristik von 2 verschieden ist, $f : X \to X$ eine affine Abbildung sowie $P, Q \in X$ verschiedene Punkte, für die $f(P) = Q$ und $f(Q) = P$ gilt.

Beweisen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt.

Aufgabe 6/1/290
Affine Fortsetzung

Index: affiner Raum, affine Abbildung, affin unabhängig, affine Basis, affine Fortsetzung

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

X und X' seien affine Räume, $(P_i)_{i\in I}$ eine affine Basis von X und $(P'_i)_{i\in I}$ eine Familie von Punkten aus X'. f sei die eindeutig bestimmte affine Abbildung $f : X \to X'$ mit $f(P_i) = P'_i$ für alle $i \in I$.

Beweisen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn $(P'_i)_{i\in I}$ eine affin unabhängige Familie in X' ist.

Aufgabe 6/1/300
Strahlensatz und Teilverhältnis

Index: affiner Raum, Teilverhältnis, affine Abbildung, Invarianz des Teilverhältnisses, Isomorphismus affiner Räume

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Beweisen Sie den Strahlensatz unter Benutzung des Invarianz des Teilverhältnisses bei affinen Isomorphismen.

Aufgabe 6/1/310
Eine exakte Folge von Gruppen

Index: affiner Raum, affine Abbildung, exakte Folge, Translation

Stoffeinheiten: 6/1/5 - 6/1/9 Affine Abbildungen

X sei ein nichtleerer affiner Raum, $j : \mathrm{T}(X) \to \mathrm{GA}(X)$ der Gruppenhomomorphismus, der dem Vektor $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(X)$ die Translation $\tau_{\boldsymbol{v}} : X \to X$ zuordnet und $p : \mathrm{GA}(X) \to \mathrm{GL}(\mathrm{T}(X))$ der Homomorphismus, der der affinen Transformation f die entsprechende lineare Abbildung $\mathrm{T}(f)$ zuordnet. Mit den trivialen einelementigen Gruppen $\mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{1}$ entsteht eine exakte Folge von Gruppenhomomorphismen:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathrm{T}(X) \xrightarrow[\boldsymbol{v} \mapsto \tau_{\boldsymbol{v}}]{j} \mathrm{GA}(X) \xrightarrow[f \mapsto \mathrm{T}(f)]{\pi} \mathrm{GL}(\mathrm{T}(X)) \longrightarrow \mathbf{1}$$

Zeigen Sie:

(1) Für alle $P \in X$ ist die Abbildung $\psi_P : \mathrm{GL}(\mathrm{T}(X)) \to \mathrm{GA}(X)$, die der linearen Abbildung φ eine affine Transformation $f : X \to X$ mit $f(P + \boldsymbol{v}) = P + \varphi(\boldsymbol{v})$, $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T}(X)$ zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus, und es gilt $\pi\psi_P = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}(\mathrm{T}(X))}$.

(2) Zu jedem der unter (1) gefundenen Homomorphismen ψ_P existiert eine bijektive Abbildung
$$\Phi_P : \mathrm{T}(X) \times \mathrm{GL}(\mathrm{T}(X)) \to \mathrm{GA}(X), \quad (\boldsymbol{v}, \varphi) \mapsto \tau_{\boldsymbol{v}} \cdot \psi_P(\varphi),$$
die jedoch im Allgemeinen kein Gruppenhomomorphismus ist, wenn die Operation auf der linken Seite komponentenweise definiert wird.

(3) Geben Sie auf $\mathrm{T}(X) \times \mathrm{GL}(\mathrm{T}(X))$ eine Operation an, die diese Menge zu einer Gruppe macht und die unter (2) definierte Abbildung Φ_P zu einem Gruppenhomomorphismus.

Aufgabe 6/1/320 (S: Varianten)
Affine Koordinaten (Charakteristik 0)

Index: affiner Raum, affine Basis, affine Koordinaten

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Im affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte
$$P_0 = (-4, -5, -5)\,, \quad P_1 = (-1, -8, -2)$$
$$P_2 = (-1, -6, -8)\,, \quad P_3 = (-6, -7, -3)$$
gegeben. Zeigen Sie, dass (P_0, P_1, P_2, P_3) eine affine Basis ist und bestimmen Sie die affinen Koordinaten von $Q = (19, -14, -16)$ bezüglich dieser Basis.

Lösung. Zunächst ist zu zeigen, dass im Translationsvektorraum $\mathrm{T}(\mathbb{R}^3)$ die Vektoren
$$\boldsymbol{b}_1 := \overrightarrow{P_0P_1} = (3, -3, 3)\,,$$
$$\boldsymbol{b}_2 := \overrightarrow{P_0P_2} = (3, -1, -3)\,,$$
$$\boldsymbol{b}_3 := \overrightarrow{P_0P_3} = (-2, -2, 2)$$
eine Basis bilden. Die affinen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ von Q sind dann durch die Bedingung $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 = \overrightarrow{P_0Q}$ eindeutig bestimmt. Mit
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 23 \\ -3 & -1 & -2 & -9 \\ 3 & -3 & 2 & -11 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, 4, \mathbb{R})$$
bezeichnen wir die Matrix, deren erste drei Spalten durch die Tupel $\boldsymbol{b}_i$ gebildet werden und deren letzte durch $\overrightarrow{P_0Q}$ gegeben ist. Mit zeilenäquivalenten Umformungen wird B in
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 23 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
überführt; daraus ist zu entnehmen, dass die ersten drei Spalten, daher auch $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ linear unabhängig sind; diese Vektoren bilden aus Dimensionsgründen eine Basis des Translationsraumes. Die Matrix B ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems, das gesuchte Koordinatentupel seine eindeutig bestimmte Lösung; sie lässt sich aus C leicht ablesen. Wir erhalten $(x_1, x_2, x_3) = (2, 5, -1)$.

Aufgabe 6/1/330 (S: Varianten)
Affine Koordinaten (Charakteristik 3)

Index: affiner Raum, affine Basis, affine Koordinaten

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Im affinen Standardraum $\mathbb{F}_3^3$ sind die Punkte

$$P_0 = (1, 1, 1)\,, \quad P_1 = (1, 1, 0)$$
$$P_2 = (0, 1, -1)\,, \quad P_3 = (0, 0, 0)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (P_0, P_1, P_2, P_3) eine affine Basis ist und bestimmen Sie die affinen Koordinaten von $Q = (-1, 1, 1)$ bezüglich dieser Basis.

Lösung. Zunächst ist zu zeigen, dass im Translationsvektorraum $\mathrm{T}(\mathbb{F}_3^3)$ die Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 := \overrightarrow{P_0P_1} = (0, 0, -1)\,,$$
$$\boldsymbol{b}_2 := \overrightarrow{P_0P_2} = (-1, 0, 1)\,,$$
$$\boldsymbol{b}_3 := \overrightarrow{P_0P_3} = (-1, -1, -1)$$

eine Basis bilden. Die affinen Koordinaten $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{F}_3^3$ von Q sind dann durch die Bedingung $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 = \overrightarrow{P_0Q}$ eindeutig bestimmt. Mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3, 4, \mathbb{F}_3)$$

bezeichnen wir die Matrix, deren erste drei Spalten durch die Tupel $\boldsymbol{b}_i$ gebildet werden und deren letzte durch $\overrightarrow{P_0Q}$ gegeben ist. Mit zeilenäquivalenten Umformungen wird B in

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

überführt; daraus ist zu entnehmen, dass die ersten drei Spalten, daher auch $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ linear unabhängig sind; diese Vektoren bilden aus Dimensionsgründen eine Basis des Translationsraumes. Die Matrix B ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems, das gesuchte Koordinatentupel seine eindeutig bestimmte Lösung; sie lässt sich aus C leicht ablesen. Wir erhalten $(x_1, x_2, x_3) = (-1, -1, 0)$.

Aufgabe 6/1/340 (S: Varianten)

Affine Koordinaten (Charakteristik 2)

Index: affiner Raum, affine Basis, affine Koordinaten

Stoffeinheiten: 6/1/20 - 6/1/27 Affine Fortsetzung und affine Koordinaten

Im affinen Standardraum $\mathbb{F}_2^3$ sind die Punkte

$$P_0 = (0, 1, 1)\,, \quad P_1 = (1, 1, 1)$$
$$P_2 = (1, 1, 0)\,, \quad P_3 = (0, 0, 1)$$

gegeben. Zeigen Sie, dass (P_0, P_1, P_2, P_3) eine affine Basis ist und bestimmen Sie die affinen Koordinaten von $Q = (1, 1, 1)$ bezüglich dieser Basis.

Lösung. Zunächst ist zu zeigen, dass im Translationsvektorraum $\mathrm{T}(\mathbb{F}_2^3)$ die Vektoren

$$\boldsymbol{b}_1 := \overrightarrow{P_0P_1} = (1, 0, 0)\,,$$
$$\boldsymbol{b}_2 := \overrightarrow{P_0P_2} = (1, 0, 1)\,,$$

$$\boldsymbol{b}_3 := \overrightarrow{P_0P_3} = (0,1,0)$$

eine Basis bilden. Die affinen Koordinaten $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{F}_2^3$ von Q sind dann durch die Bedingung $x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + x_3\boldsymbol{b}_3 = \overrightarrow{P_0Q}$ eindeutig bestimmt. Mit

$$B = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(3,4,\mathbb{F}_2)$$

bezeichnen wir die Matrix, deren erste drei Spalten durch die Tupel $\boldsymbol{b}_i$ gebildet werden und deren letzte durch $\overrightarrow{P_0Q}$ gegeben ist. Mit zeilenäquivalenten Umformungen wird B in

$$C = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}$$

überführt; daraus ist zu entnehmen, dass die ersten drei Spalten, daher auch $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ linear unabhängig sind; diese Vektoren bilden aus Dimensionsgründen eine Basis des Translationsraumes. Die Matrix B ist die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems, das gesuchte Koordinatentupel seine eindeutig bestimmte Lösung; sie lässt sich aus C leicht ablesen. Wir erhalten $(x_1,x_2,x_3) = (1,0,0)$.

Aufgabe 6/1/350
Charakterisierung von Hyperebenen

Index: affiner Raum, affiner Unterraum, Hyperebene, Hyperebenenschnitt

Stoffeinheiten: 6/1/10 - 6/1/19 Affine Unterräume

Wir betrachten einen endlichdimensionalen affinen Raum X und darin einen affinen Teilraum E von positiver Dimension. Beweisen Sie: E ist genau dann eine Hyperebene, wenn E zu jedem Teilraum parallel ist, der E nicht schneidet.

Aufgabe 6/2/005
Ein Skalarprodukt

Index: Skalarprodukt, hermitesche Form

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

$V = \mathrm{M}(n,m;\mathbb{R})$ sei der Vektorraum der reellen $n \times m$ Matrizen. Die Spur $\mathrm{tr}(C)$ einer quadratischen Matrix C wird (wie üblich) als Summe $\sum_i c_{ii}$ der Elemente ihrer Hauptdiagonale definiert.

(1) Zeigen Sie, dass für $A, B \in V$ stets $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot {}^{\mathrm{t}}A)$ ist.

(2) Ist die durch
$$< A, B > := \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A \cdot B)$$
definierte Abbildung $V^2 \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt?

Aufgabe 6/2/010
Satz des Thales

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, Norm eines Vektors, orthogonale Vektoren

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

$(V, <>)$ sei ein euklidischer Vektorraum mit der durch $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$ gegebenen Norm $\|\ \|$. Zeigen Sie: Für $x, y \in V$ gilt $\|x\| = \|y\|$ genau dann, wenn $(x-y) \perp (x+y)$ ist. Interpretieren Sie diese Aussage als *Satz des Thales*.

Aufgabe 6/2/020
Winkel und Drehungen

Index: euklidischer Standardraum, Winkel zwischen zwei Vektoren, Skalarprodukt, Norm eines Vektors

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

Wir betrachten die euklidischen Standardräume $\mathbb{R}^n$.

(1) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x} := (1, 2, -2)$, $\boldsymbol{y} := (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x} := (-1, 0, 2, -1)$, $\boldsymbol{y} := (0, \sqrt{2}, -2, 1) \in \mathbb{R}^4$.

(3) Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ wird bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\mathrm{M}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie:
Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, so ist der Winkel zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ gleich dem Winkel zwischen $\varphi(\boldsymbol{x})$ und $\varphi(\boldsymbol{y})$; weiter gilt: Ist $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$, dann ist auch $\|\varphi(\boldsymbol{x})\| = \|\varphi(\boldsymbol{y})\|$.

Aufgabe 6/2/030
Eigenschaften der Orthogonalität

Index: euklidischer Vektorraum, Norm, orthogonale Vektoren, orthogonaler Unterraum zu einer Teilmenge

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

V sei ein euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie:

(1) Für eine Teilmenge $M \subseteq V$ ist $M^{\perp}$ stets Unterraum von V.

(2) Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, so gilt

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}\ .$$

(3) Für Unterräume U und W von V gilt stets

(i) $U \subseteq W \Rightarrow U^{\perp} \supseteq W^{\perp}$,

(ii) $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$,

(iii) $(U \cap W)^{\perp} = U^{\perp} + W^{\perp}$.

Aufgabe 6/2/040 (S: Varianten)
Winkel zwischen Vektoren

Index: euklidischer Standardraum, Winkel zwischen zwei Vektoren, Skalarprodukt, Norm eines Vektors

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{v} = (1, 2, 1)$ und $\boldsymbol{w} = (-1, -1, 0)$ im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$.

Lösung. Mit α bezeichnen wir den Winkel zwischen beiden Vektoren. Offensichtlich ist $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>= -3$, $<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}>= 6$, $<\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}>= 2$ und

$$\cos^2(\alpha) = \frac{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}>^2}{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}> \cdot <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}>} = \frac{3}{4}, \text{ daher}$$

$$\alpha = \operatorname{arc}\cos(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}.$$

Aufgabe 6/2/050 (S: Varianten)

Winkel zwischen Geraden

Index: euklidischer affiner Standardraum, Winkel zwischen zwei Vektoren, Skalarprodukt, Norm eines Vektors

Stoffeinheiten: 6/2/15 - 6/2/16 Euklidische affine Räume

Zeigen Sie, dass sich die Geraden

$$G_1 = (3, 1, 3) \vee (5, 3, 3),$$
$$G_2 = (11, 6, 6) \vee (13, 7, 7)$$

im euklidischen affinen Standardraum $\mathbb{R}^3$ schneiden und bestimmen Sie den Schnittwinkel. (Der Schnittwinkel ist derjenige Winkel im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, der durch zwei geeignete, von $\mathbf{0}$ verschiedene Vektoren der Translationsräume gebildet wird.)

Lösung. Die Bedingung $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ ist offensichtlich äquivalent dazu, dass das lineare Gleichungssystem

$$(3, 1, 3) + s \cdot (2, 2, 0) = (11, 6, 6) + t \cdot (2, 1, 1)$$

eine Lösung $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ besitzt. Nun ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 8 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix dieses Systems, und leicht finden wir eine zeilenäquivalente Stufenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ist zu entnehmen, dass der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt, d.h. $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$.

Die Verbindungsvektoren der gegebenen Punkte sind Erzeugende der entsprechenden Translationsräume. Wir erhalten $\mathrm{T}(G_1) = \mathbb{R}\boldsymbol{v}$ und $\mathrm{T}(G_2) = \mathbb{R}\boldsymbol{w}$ mit $\boldsymbol{v} = (2, 2, 0)$, $\boldsymbol{w} = (2, 1, 1)$. Für den Schnittwinkel α der Geraden G_1 und G_2 ergibt sich

$$\cos^2(\alpha) = \frac{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}>^2}{<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>\cdot<\boldsymbol{w},\boldsymbol{w}>} = \frac{3}{4}\,,$$

folglich

$$\alpha = \arccos(\frac{1}{2}\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6}\,.$$

Aufgabe 6/2/052
Winkel und Orthogonalbasen

Index: euklidischer Vektorraum, Winkel zwischen zwei Vektoren, Orthogonalbasis

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ sei eine Orthogonalbasis im euklidischen Vektorraum V und $\boldsymbol{x} \in V\setminus\{\boldsymbol{0}\}$ ein beliebiger Vektor.
Beweisen Sie: Ist α_i der Winkel zwischen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{b}_i$, so gilt

$$\cos^2(\alpha_1)+\ldots+\cos^2(\alpha_n) = 1.$$

Aufgabe 6/2/055
Orthogonales Komplement (1)

Index: unitärer Vektorraum, Skalarprodukt, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

P_n sei der unitäre Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$<f,g>:= \overline{a}_0b_0+\overline{a}_1b_1+\ldots+\overline{a}_nb_n$$

definiert ist, wobei $f,g\in\mathrm{P}_n$ Polynome

$$f = a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\,,\quad a_i\in\mathbb{C}$$
$$g = b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n\in\mathrm{P}_n\,,\quad b_i\in\mathbb{C}$$

bezeichnen.
Bestimmen Sie jeweils den orthogonalen Unterraum für

(1) den Unterraum der Polynome f mit $f(1)=0\,,$

(2) den Unterraum $\mathbb{C}\cdot X^n$.

Aufgabe 6/2/056
Orthogonales Komplement (2)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$<f,g>:= a_0b_0+a_1b_1+\ldots+a_nb_n$$

definiert ist, wobei $f,g\in\mathrm{P}_n$ Polynome

$$f = a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n\,,\quad a_i\in\mathbb{R}$$
$$g = b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n\in\mathrm{P}_n\,,\quad b_i\in\mathbb{R}$$

bezeichnen. Bestimmen Sie das orthogonale Komplement für

(1) den Unterraum der Polynome f mit $f(1) = 0$,

(2) den Unterraum $\mathbb{R} \cdot X^n$.

Aufgabe 6/2/060
Bestimmung des Abstands eines Punktes von einer Geraden

Index: euklidischer affiner Standardraum, Abstand von Unterräumen, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/17 - 6/2/22 Abstand von Unterräumen

Im 2-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ betrachten wir den Punkt P und die Gerade $G = Q \vee R$, wobei $P = (1,3)$, $Q = (1,1)$ und $R = (-1,2)$ ist.

Bestimmen Sie den Abstand zwischen P und G.

Aufgabe 6/2/065
Bestimmung des Abstands eines Punktes von einem Unterraum (1)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Abstand von Unterräumen, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/17 - 6/2/22 Abstand von Unterräumen

P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$<f, g> := a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$$

definiert ist, wobei $f, g \in \mathrm{P}_n$ Polynome

$$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$
$$g = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n \in \mathrm{P}_n, \quad b_i \in \mathbb{R}$$

bezeichnen.
Wir betrachten P_n in der üblichen Weise als affinen euklidischen Raum. Bestimmen Sie den Abstand zwischen dem Unterraum $\mathrm{P}_{n-1} \subset \mathrm{P}_n$ und

(1) dem Polynom X^n,

(2) dem Polynom $a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$
(für gegebene Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$),

(3) dem Polynom $a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} + a_n X^n$
(für gegebene Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 6/2/070
Bestimmung verschiedener Abstände

Index: euklidischer affiner Standardraum, Abstand von Unterräumen, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/17 - 6/2/22 Abstand von Unterräumen

Wir betrachten den 3-dimensionalen affinen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$.

(1) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $(1,1,1)$ von der Ebene, die durch $x + 2y - 3z = 1$ gegeben ist.

(2) Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden, die durch folgende Parameterdarstellungen gegeben sind:

$$G_1 = (1,0,1) + \mathbb{R} \cdot (0,0,1),$$
$$G_2 = (1,2,3) + \mathbb{R} \cdot (1,1,1)$$

(3) Es sei $E := P_1 \vee P_2 \vee P_3$ mit $P_1 = (1,3,-1)$, $P_2 = (2,3,0)$, $P_3 = (3,4,1)$. Bestimmen Sie den Abstand zwischen E und $(0,0,0)$.

Aufgabe 6/2/075
Bestimmung des Abstands eines Punktes von einem Unterraum (2)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Abstand von Unterräumen, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/17 - 6/2/22 Abstand von Unterräumen

V sei der Vektorraum der stetigen Funktionen $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ und
$<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ die Abbildung, die durch durch

$$<f,g> := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

definiert ist.

(1) Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale Unterraum von V mit der Einschränkung der Abbildung $<,>$ einen euklidischen Vektorraum bildet.

(2) Bestimmen Sie im Sinne von (1) den Abstand von $\cos^{n+1}$ zum Unterraum

$$\mathbb{R} + \mathbb{R}\cdot\cos + \mathbb{R}\cdot\sin + \mathbb{R}\cdot\cos_2 + \mathbb{R}\cdot\sin_2 + \ldots + \mathbb{R}\cdot\cos_n + \mathbb{R}\cdot\sin_n$$

für eine natürliche Zahl $n \geq 1$, wobei $\sin_k$ und $\cos_k$ die durch $\sin_k(x) := \sin(kx)$ bzw. $\cos_k(x) := \cos(kx)$ definierten Funktionen sind.

Aufgabe 6/2/076 (S: Varianten)
Bestimmung des Abstands eines Punktes von einem Unterraum (3)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Abstand von Unterräumen, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/2/17 - 6/2/22 Abstand von Unterräumen

P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$<f,g> := a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

definiert ist, wobei $f, g \in \mathrm{P}_n$ Polynome

$$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n\,, \quad a_i \in \mathbb{R}$$
$$g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n \in \mathrm{P}_n\,, \quad b_i \in \mathbb{R}$$

bezeichnen.
Gegeben sind die Polynome

$$f_1 = 3X^2 + 2X + 7,\ f_2 = 2X^2 + 8X + 6,$$
$$f_3 = 3X^2 + 2X + 5,\ f_4 = 15X^2 + 2X + 7.$$

(1) Bestimmen Sie das Polynom g mit $\deg(g) \leq 2$, das denselben Abstand von f_1, f_2, f_3, f_4 hat.

(2) Bestimmen Sie den Abstand zwischen g und f_1.

(3) Zeigen Sie, dass $h = g + a_3X^3 + a_4X^4 + \ldots + a_nX^n$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ ebenfalls denselben Abstand von f_1, f_2, f_3, f_4 hat und bestimmen Sie den Abstand zwischen h und f_1.

Lösung. Es sei $g = b_0 + b_1X + b_2X^2 \in \mathrm{P}$ ein Polynom, das denselben Abstand von f_1, f_2, f_3, f_4 hat. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(g, f_1)^2 = (b_2 - 3)^2 + (b_1 - 2)^2 + (b_0 - 7)^2 = \\
&\mathrm{d}(g, f_2)^2 = (b_2 - 2)^2 + (b_1 - 8)^2 + (b_0 - 6)^2 = \\
&\mathrm{d}(g, f_3)^2 = (b_2 - 3)^2 + (b_1 - 2)^2 + (b_0 - 5)^2 = \\
&\mathrm{d}(g, f_4)^2 = (b_2 - 15)^2 + (b_1 - 2)^2 + (b_0 - 7)^2 \,,
\end{aligned}$$

wobei $\mathrm{d}(g, f_i)$ den Abstand zwischen g und f_i bezeichnet. Da sich Quadrate auf den verschiedenen Seiten der so erhaltenen Gleichungen aufheben, erhalten wir $b_2 = 9,\ b_1 = 6,\ b_0 = 6$ und so die Lösungen für (1) und (2) als

$$g = 9X^2 + 6X + 6\,, \quad \mathrm{d}(g, f_1) = \sqrt{53}.$$

Aufgabe 6/2/080
Orientierter Winkel

Index: euklidischer affiner Standardraum, orientierter Winkel, kanonisch orientierter euklidischer Standardraum

Stoffeinheiten: 6/2/27 - 6/2/32 Volumen

Bestimmen Sie den orientierten Winkel zwischen den Vektoren

$$\boldsymbol{x} := (4, 3),\ \boldsymbol{y} := (3\sqrt{3} + 4, -4\sqrt{3} + 3)$$

in der kanonisch orientierten euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6/2/090
Vektorprodukt (1)

Index: kanonisch orientierter euklidischer Standardraum, Vektorprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

Im kanonisch orientierten euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Gleichungen für das Vektorprodukt mit dem Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ zu lösen:

(1) $(3, 1, 4) \times \boldsymbol{x} = (-1, -1, 1)$

(2) $(2, 2, 1) \times \boldsymbol{x} = (1, 2, 3)$

(3) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit beliebig gegebenen $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{a} \neq 0$. Zeigen Sie dazu: Die Lösungsmenge ist genau dann nicht leer, wenn $<\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}> = 0$ ist, und in diesem Fall besitzt sie die Gestalt $\{\boldsymbol{x}_0 + \alpha \cdot \boldsymbol{a} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ mit einer beliebig gewählten speziellen Lösung $\boldsymbol{x}_0$.

Aufgabe 6/2/100
Vektorprodukt (2)

Index: kanonisch orientierter euklidischer Standardraum, Vektorprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

Ist das Vektorprodukt in einem euklidischen orientierten 3-dimensionalen Raum assoziativ, kommutativ bzw. distributiv? Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 6/2/110
Quaternionen

Index: kanonisch orientierter euklidischer Standardraum, Vektorprodukt, Norm eines Vektors

Stoffeinheiten: 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

Wir betrachten einen orientierten 3-dimensionalen euklidischen Vektorraum V und bilden die direkte Summe $\mathbb{H} := \mathbb{R} \bigoplus V$. Zeigen Sie:

(1) Auf $\mathbb{H}$ lässt sich eindeutig eine Multiplikation „ $\cdot$ “ definieren, bei der die beiderseitige Multiplikation mit Elementen von $\mathbb{R}$ durch die skalare Multiplikation im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{H}$ gegeben ist und so, dass für $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \in V$ gilt $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = - < \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} > + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$. $\mathbb{H}$ wird durch diese Multiplikation zu einem (nichtkommutativen) Ring.

(2) Die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \bigoplus V \to \mathbb{R} \bigoplus V$ mit $\varphi(a + \boldsymbol{u}) = a - \boldsymbol{u}$ für $a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in V$ ist $\mathbb{R}$-linear, und es ist $\varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\beta) \cdot \varphi(\alpha)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$. Weiter wird durch $N : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
$$N(\alpha) := \sqrt{\alpha \cdot \varphi(\alpha)}\,, \quad \alpha \in \mathbb{H}$$
eine Norm auf dem Vektorraum $\mathbb{H}$ gegeben, d.h. es gelten die folgenden Eigenschaften:
   (i) Für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{H}$ ist $N(\boldsymbol{x}) \geq 0$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
   (ii) Für $\boldsymbol{x} \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $N(\alpha \cdot \boldsymbol{x}) = |\alpha| \cdot N(\boldsymbol{x})$.
   (iii) Für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ gilt $N(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq N(\boldsymbol{x}) + N(\boldsymbol{y})$.

(3) Mit der Einschränkung der obigen Multiplikation bildet $\mathbb{H} - \{0\}$ eine Gruppe.

Aufgabe 6/2/120 (S: Varianten)
Orthonormierung (1)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Orthonormalbasis, Skalarprodukt, schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

Verwenden Sie das Orthogonalisierungsverfahren nach E. Schmidt zur Bestimmung einer Orthonormalbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$, deren Fahne mit der Fahne der folgenden Basis $(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ übereinstimmt;
$$\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, -1)\,, \quad \boldsymbol{v}_2 = (-1, 3, -2)\,, \quad \boldsymbol{v}_3 = (-1, 1, 2)\,.$$

Lösung. Wir orthogonalisieren zunächst die gegebene Basis. Dazu wird $\boldsymbol{b}_1 := \boldsymbol{v}_1$ gewählt und $\boldsymbol{b}_2 := x_1 \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{v}_2$ als Vektor, für den $< \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 >= 0$ ist, d.h.
$$x_1 < \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 > + < \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_2 > = 0 \text{ mit } < \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1 > = 3\,, \ < \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_2 > = -2\,.$$
Es folgt $x_1 = \dfrac{2}{3}$, und Einsetzen ergibt $\boldsymbol{b}_2 = (-\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{3}, -\dfrac{8}{3})$.

Analog werden $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gewählt, für die
$$\boldsymbol{b}_3 = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{v}_3\,, \quad <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3> = <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3> = 0$$
ist, daher
$$y_1 <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_1> + <\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_3> = \ y_2 <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2> + <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_3> = \ 0\,.$$
Aus
$$<\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{v}_3> = -4\,, \quad <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_2> = \frac{38}{3}\,, \quad <\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{v}_3> = -\frac{8}{3}$$
erhalten wir
$$y_1 = \frac{4}{3}\,, \quad y_2 = \frac{4}{19}\,.$$
Durch Einsetzen ergibt sich der dritte Basisvektor $\boldsymbol{b}_3 = (\frac{5}{19}, \frac{3}{19}, \frac{2}{19})$.

Abschließend wird die gefundene Orthogonalbasis $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3)$ durch Multiplikation mit Konstanten normiert; wir erhalten z.B. die Orthonormalbasis
$$\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\,(-1,1,1)\,,\ \frac{1}{\sqrt{114}}\,(1,-7,8)\,,\ \frac{1}{\sqrt{38}}\,(5,3,2)\Big)\,.$$

Anmerkung. Vor dem Normieren kann ein Vektor mit einem beliebigen Faktor ($\neq 0$) multipliziert werden; auf diese Weise wird das Rechnen mit Brüchen oder gemeinsamen Faktoren der Komponenten weitgehend überflüssig!

Aufgabe 6/2/130
Orthonormierung (2)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Orthonormalbasis, Skalarprodukt, schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

Orthonormieren Sie in jedem der folgenden euklidischen Vektorräume V die angegebenen Vektoren $v_1, v_2, \ldots \in V$ nach dem Verfahren von E. Schmidt.

(1) V sei der euklidische Standardraum $\mathbb{R}^3$, $v_1 := (1,2,1)$, $v_2 := (2,1,2)$.
(2) V sei der euklidische Standardraum $\mathbb{R}^4$, $v_1 := (1,0,1,0)$, $v_2 := (1,2,1,1)$, $v_3 := (1,1,1,1)$.

Aufgabe 6/2/140
Orthonormierung (3)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Orthonormalbasis, Skalarprodukt, schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des Unterraumes
$U := \mathbb{R}\cdot(1,1,1,1) + \mathbb{R}\cdot(1,2,3,4)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^4$, in der der Vektor $(1,1,1,1)$ vorkommt!

Aufgabe 6/2/150
Orthonormierung (4)

Index: euklidischer affiner Standardraum, Orthonormalbasis, Skalarprodukt, Vektorprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

In jedem der folgenden Fälle sind die gegebenen Vektoren zu einer Orthonormalbasis des betreffenden euklidischen Vektorraumes V zu ergänzen:

(1) V ist der euklidische Standardraum $\mathbb{R}^3$ und $v_1 \in V$ mit
$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3).$$
(2) V ist der euklidische Standardraum $\mathbb{R}^4$ und $v_1, v_2 \in V$ mit
$$v_1 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1),\ v_2 = \frac{1}{2}(1,1,1,1).$$

Aufgabe 6/2/160
Skalarprodukt auf einem Vektorraum reeller Polynome (1)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

P_n sei der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ und $a \in \mathbb{R}$ eine Zahl. Wir definieren eine Abbildung $<\,,\,>_a$: $\mathrm{P}_n \times \mathrm{P}_n \to \mathbb{R}$ durch
$$<f,g>_a = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)g^{(k)}(a),$$
wobei $f^{(k)}(a)$ die k-Ableitung des Polynoms f an der Stelle a bezeichnet. Ist $<f,g>_a$ ein Skalarprodukt?

Aufgabe 6/2/170
Skalarprodukt auf einem Vektorraum reeller Polynome (2)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

P_n sei der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ und $a_0, \ldots, a_r$ paarweise verschiedene reelle Zahlen. Durch
$$<f,g> := \sum_{k=0}^{r} f(a_k)g(a_k)$$
wird eine Abbildung $\mathrm{P}_n \times \mathrm{P}_n \to \mathbb{R}$ definiert. Welche Bedingung müssen die gegebenen Daten erfüllen, damit $<f,g>$ ein Skalarprodukt ist?

Aufgabe 6/2/180
Skalarprodukt auf Vektorräumen stetiger Funktionen (1)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

$a, b \in \mathbb{R}$ seien Zahlen, $a < b$ und V der reelle Vektorraum der stetigen Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$. Erfüllt die durch

$$<f,g>:=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

definierte Abbildung $V^2 \to \mathbb{R}$ folgende Bedingungen?

(1) $<\,,\,>$ ist bilinear.

(2) Für $f \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist $<f,f>$ positiv.

Aufgabe 6/2/190
Skalarprodukt auf Vektorräumen stetiger Funktionen (2), eine Orthonormalbasis

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

V sei der Vektorraum der stetigen Funktionen $[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$.

(1) Zeigen Sie, dass durch

$$<f,g>=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

auf jedem endlichdimensionalen Unterraum U von V ein Skalarprodukt definiert ist, d.h. $(U,<\,,>)$ ist ein euklidischer Vektorraum.

(2) Zeigen Sie, dass das $(2n+1)$-Tupel

$$(1, \cos, \sin, \cos_2, \sin_2, \ldots, \cos_n, \sin_n)$$

eine Orthogonalbasis des von diesen Abbildungen erzeugten Unterraumes U bildet, wobei $\sin_k$ und $\cos_k$ die durch $\sin_k(x) := \sin(kx)$ bzw. $\cos_k(x) := \cos(kx)$ definierten Funktionen sind.
Gewinnen Sie daraus durch Normieren eine Orthonormalbasis.

Aufgabe 6/2/200
Beispiele positiv definiter hermitescher Formen

Index: unitärer Vektorraum, positiv definite hermitesche Form

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

$V = \mathrm{M}(n,m;\mathbb{C})$ sei der Vektorraum der komplexen $n \times m$-Matrizen. Stellen Sie fest, welche der folgenden Abbildungen $V^2 \to \mathbb{C}$ eine positiv definite hermitesche Form ist.

(1) $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A\cdot{}^{\mathrm{t}}B)$.

(2) $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(\overline{A}\cdot{}^{\mathrm{t}}B)$.

(3) $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}(A\cdot{}^{\mathrm{t}}\overline{B})$.

Aufgabe 6/2/210
Skalarprodukt auf Vektorräumen stetiger Funktionen (3), eine Orthonormalbasis

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren, Orthonormalbasis

Stoffeinheiten: 6/2/8 - 6/2/14 Orthogonalität und Orthogonalisierung

P_2 sei der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2.

(1) Zeigen Sie, dass auf P_2 durch

$$< f, g > := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

(2) Bestimmen Sie in dem durch (1) gegebenen euklidischen Vektorraum P_2 eine Orthonormalbasis, deren Fahne mit der Fahne der Basis $(1, X, X^2)$ übereinstimmt.

Aufgabe 6/2/220

Skalarprodukt auf der Komplexifizierung eines euklidischen Raumes

Index: euklidischer Vektorraum, unitärer Vektorraum, Skalarprodukt

Stoffeinheiten: 6/2/1 - 6/2/7 Positiv definite hermitesche Formen

V sei ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $<,>$ und $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ die Komplexifizierung von V. Dabei wird V in der üblichen Weise mit dem ersten direkten Summanden identifiziert. Zeigen Sie:

$V_{\mathbb{C}}$ ist ein unitärer Vektorraum mit dem Skalarprodukt, das durch

$$< x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 > := (< x_1, x_2 > + < y_1, y_2 >) + i(< x_1, y_2 > - < y_1, x_2 >)$$

definiert ist ($x_i, y_j \in V$), und dessen Einschränkung auf den reellen Unterraum V von $V_{\mathbb{C}}$ das Skalarprodukt des ursprünglichen euklidischen Raumes V ergibt.

Aufgabe 6/2/230

Gramsche Matrix (1)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, orientiertes Volumen, gramsche Matrix

Stoffeinheiten: 6/2/27 - 6/2/32 Volumen

P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$< f, g > := a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

definiert ist, wobei $f, g \in \mathrm{P}_n$ Polynome

$$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n\,, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

$$g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n \in \mathrm{P}_n\,, \quad b_i \in \mathbb{R}$$

bezeichnen. $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ ist eine Basis von P_n.

Bestimmen Sie die *gramsche Matrix* $((< X^i, X^j >)_{i,j=0,\ldots,n})$.

Aufgabe 6/2/240 (S: Varianten)

Gramsche Matrix (2)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, orientiertes Volumen, gramsche Matrix

Stoffeinheiten: 6/2/27 - 6/2/32 Volumen

$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ sei eine Basis im zweidimensionalen euklidischen Vektorraum V mit dem Skalarprodukt $<,>$ und $\boldsymbol{b}_1', \boldsymbol{b}_2' \in V$.

Berechnen Sie die *gramsche Matrix* $\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) := (< \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_j >)_{1\leq i,j\leq 2}$ der Basis $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$, falls

$$\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}'_1,\boldsymbol{b}'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

ist und die Koordinaten bezüglich $\mathcal{B}$ für $\boldsymbol{b}_1$ durch $(-1,1)$ bzw. für $\boldsymbol{b}_2$ durch $(-2,1)$ gegeben sind.

Lösung. Offenbar sind $\boldsymbol{b}'_1$ und $\boldsymbol{b}'_2$ linear unabhängig. Es sei $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{b}'_1,\boldsymbol{b}'_2)$ und

$$\mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$. Dann ist

$$U := \mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Nun sei $U = (u_{i,j})$. Dann ist $\boldsymbol{b}_i = \sum_r u_{ri}\boldsymbol{b}'_r$, und es ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2) &= \Big(<\sum_r u_{ri}\boldsymbol{b}'_r, \sum_s u_{sj}\boldsymbol{b}'_s>\Big) \\ &= \Big(\sum_{r,s} u_{ri} <\boldsymbol{b}'_r,\boldsymbol{b}'_s> u_{sj}\Big) = {}^{\mathrm{t}}U\cdot \mathrm{GM}(\boldsymbol{b}'_1,\boldsymbol{b}'_2)\cdot U \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6/2/250 (S: Varianten)

Gramsche Matrix (3)

Index: euklidischer Vektorraum, Skalarprodukt, orientiertes Volumen, gramsche Matrix

Stoffeinheiten: 6/2/27 - 6/2/32 Volumen

$\mathcal{B} = (\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ sei eine Basis im unitären Vektorraum V mit der positiv definiten hermiteschen Form $<,>$ sowie $\boldsymbol{b}'_1,\boldsymbol{b}'_2 \in V$. Berechnen Sie die *gramsche Matrix* $\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2) := (<\boldsymbol{b}_i,\boldsymbol{b}_j>)_{1\le i,j\le 2}$ der Basis $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$, falls

$$\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}'_1,\boldsymbol{b}'_2) = \begin{pmatrix} 37 & (-i-12) \\ (-i-12) & 14 \end{pmatrix}$$

ist und bezüglich $\mathcal{B}$ die Koordinaten von $\boldsymbol{b}_1$ durch $((-3i-1),(-2i-1))$ bzw. von $\boldsymbol{b}_2$ durch $((-2i-1),(-i-1))$ gegeben sind.

Lösung. Offenbar sind $\boldsymbol{b}'_1$ und $\boldsymbol{b}'_2$ linear unabhängig. Es sei $\mathcal{B}' = (\boldsymbol{b}'_1,\boldsymbol{b}'_2)$ und

$$\mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} (-3i-1) & (-2i-1) \\ (-2i-1) & (-i-1) \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}'$ zu $\mathcal{B}$. Dann ist

$$U := \mathrm{U}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} (-i-1) & (2i+1) \\ (2i+1) & (-3i-1) \end{pmatrix}$$

die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$. Wir setzen $U = (u_{i,j})$. Dann ist $\boldsymbol{b}_i = \sum_r u_{ri}\boldsymbol{b}'_r$ und es ergibt sich

$$\mathrm{GM}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2) = \Big(<\textstyle\sum_r u_{ri}\boldsymbol{b}'_r, \sum_s u_{sj}\boldsymbol{b}'_s>\Big)$$

$$= \Big(\sum_{r,s} \bar{u}_{ri} < \boldsymbol{b}'_r, \boldsymbol{b}'_s > u_{sj}\Big) = {}^{\mathrm{t}}\bar{U} \cdot \mathrm{GM}(\boldsymbol{b}'_1, \boldsymbol{b}'_2) \cdot U$$

$$= \begin{pmatrix} (i-1) & (-2i+1) \\ (-2i+1) & (3i-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 37 & (-i-12) \\ (-i-12) & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-i-1) & (2i+1) \\ (2i+1) & (-3i-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (6i+216) & (-84i-315) \\ (66i-319) & (14i+493) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6/2/260
Vektorprodukt

Index: kanonisch orientierter euklidischer Standardraum , Vektorprodukt, Fläche eines Parallelogramms

Stoffeinheiten: 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

$\mathbb{R}^3$ sei der kanonisch orientierte euklidische 3-dimensionale Standardraum.

(1) Zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = 2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ist für $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$.

(2) Welche geometrische Bedeutung hat diese Identität?

Aufgabe 6/2/270 (S: Varianten)
Fläche und Volumen

Index: kanonisch orientierter euklidischer Standardraum, Vektorprodukt, Fläche eines Parallelogramms, Volumen eines Parallelepipeds, gramsche Determinante

Stoffeinheiten: 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

$A = (1,1,2)$, $B = (1,2,2)$, $C = (-2,-3,3)$ seien Punkte des euklidischen affinen Standardraumes $\mathbb{R}^3$.

(1) Überprüfen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts, dass der Koordinatenursprung $O := (0,0,0)$ nicht in der Ebene liegt, die durch A, B, C verläuft.

(2) Bestimmen Sie die Fläche des Parallelogramms, das durch die Ecken ABC gegeben ist.

(3) Bestimmen Sie das Volumen des Parallelepipeds, das durch $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ definiert ist.

Lösung. Wir wählen die kanonische Orientierung auf $\mathbb{R}^3$ und bezeichnen mit D die entsprechende Determinantenfunktion. Dann ist $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ das orientierte Volumen des durch $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ definierten Parallelepipeds und es gilt

$$|<\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}>| = D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\,.$$

Zu (1) bemerken wir, dass $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 7 \neq 0$ ist; dies ist gleichzeitig das in (3) erfragte Volumen.

Die offensichtliche Interpretation des Begriffs „Fläche“ unter (2) ergibt sich nun, indem die Ebene in $\mathbb{R}^3$, die A, B, C enthält, auf natürliche Weise als euklidischer affiner Raum angesehen wird. Es folgt

$$F = \|(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\| = \sqrt{10}.$$

Aufgabe 6/2/280 (S: Varianten)

Fläche eines Parallelogramms (1)

Index: kanonisch orientierter euklidischer Standardraum , Vektorprodukt, Fläche eines Parallelogramms

Stoffeinheiten: 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

$\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}$ mit $\|\boldsymbol{a}\| = 5,\ \|\boldsymbol{b}\| = 4$ seien Vektoren in einem 3-dimensionalen euklidischen Raum. Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts die Fläche der Parallelogramms, das durch $\boldsymbol{v}_1 = 5\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ definiert ist, wenn der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gleich $\frac{1}{3}\pi$ ist.

Lösung. Wir wählen eine (beliebige) Orientierung auf V, diese definiert ein Vektorprodukt $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$. Der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ gebildet wird, ist

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\| &= \|(5\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b}) \times (2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})\| \\
&= \|10\cdot\underbrace{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{0}} + 15\cdot\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + 8\cdot\underbrace{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}}_{-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}} + 12\cdot\underbrace{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{0}}\| \\
&= 7\cdot\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = 7\cdot\|\boldsymbol{a}\|\cdot\|\boldsymbol{b}\|\cdot\sin(\frac{1}{3}\pi) \\
&= 7\cdot5\cdot4\cdot\sin(\frac{1}{3}\pi) = 70\sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6/2/290 (S: Varianten)

Fläche eines Parallelogramms (2)

Index: kanonisch orientierter euklidischer Standardraum, Vektorprodukt, Fläche eines Parallelogramms

Stoffeinheiten: 6/2/33 - 6/2/42 Vektorprodukt

$\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{b}$ mit $\|\boldsymbol{a}\| = 5,\ \|\boldsymbol{b}\| = 4$ seien Vektoren in einem 3-dimensionalen euklidischen Raum. Es wird vorausgesetzt, dass der Winkel zwischen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gleich $\frac{1}{6}\pi$ ist.

(1) Berechnen Sie mit Hilfe des Vektorprodukts die Fläche des Parallelogramms, dessen Diagonalen die Vektoren $\boldsymbol{v}_1 = 6\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{v}_2 = 10\boldsymbol{a} + 12\boldsymbol{b}$ sind.

(2) Welches Verhältnis hat die Fläche des durch $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ gebildeten Parallelogramms zur Fläche des aus den Seiten $\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}$ gebildeten Parallelogramms?

Lösung. Wir wählen eine (beliebige) Orientierung auf V, diese definiert ein Vektorprodukt $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$. Das Parallelogramm, dessen Diagonalen die Vektoren $\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2$ sind, wird durch $\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1),\ \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1)$ gebildet. Sein Flächeninhalt ist

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) \times \frac{1}{2}(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1)\| &= 16\cdot\|a \times b\| \\
&= 16\cdot\|a\|\cdot\|b\|\cdot\sin(\frac{1}{6}\pi) \\
&= 16\cdot5\cdot4\cdot\sin(\frac{1}{6}\pi) = 160\,.
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt

$$\|\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2\| = 32 \cdot \|a \times b\|$$

für den Flächeninhalt des durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ definierten Parallelogramms.

Aufgabe 6/3/001
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (1)

Index: unitärer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

V sei ein unitärer Vektorraum, $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Welche Beziehung besteht zwischen den Eigenwerten von φ und denen des adjungierten Endomorphismus $\varphi^\star$ von φ?

Aufgabe 6/3/002
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (2)

Index: unitärer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus, Orthonormalbasis

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

V sei ein unitärer Vektorraum, $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus. Welche Beziehung besteht zwischen der Jordanform von φ und der Jordanform von $\varphi^\star$?

Aufgabe 6/3/003
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (3)

Index: euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus, Orthonormalbasis

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

$\mathbb{R}^3$ sei der euklidische Standardvektorraum und $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Projektion auf die Ebene $E = \mathbb{R}\boldsymbol{e}_1 + \mathbb{R}\boldsymbol{e}_2$ längs des eindimensionalen Unterraumes, der durch die Gleichung $x = 2y = z$ gegeben ist.
Bestimmen Sie die Matrix des adjungierten Endomorphismus φ^* von φ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 6/3/004
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (4)

Index: adjungierter Endomorphismus, Skalarprodukt, Orthonormalbasis, schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

P_2 sei der reelle Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 2 im Polynomring $\mathbb{R}[X]$.

(1) Zeigen Sie, dass durch

$$< f, g > := f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

ein Skalarprodukt auf P_2 definiert ist.

(2) Bestimmen Sie den adjungierten Endomorphismus des Ableitungsoperators auf dem durch (1) gegebenen euklidischen Raum P_2 durch Angabe seiner Matrix bezüglich der Basis $(1, X, X^2)$.

Aufgabe 6/3/005
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (5)

Index: euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

φ sei ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V und $\varphi^\star$ sein adjungierter Endomorphismus.
Beweisen Sie: $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^\star \cdot \varphi)$.

Aufgabe 6/3/006
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (6)

Index: euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

φ sei ein Endomorphismus des euklidischen Vektorraumes V und $\varphi^\star$ sein adjungierter Endomorphismus.
Beweisen Sie: $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(\varphi \cdot \varphi^\star)$.

Aufgabe 6/3/007
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (7)

Index: euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

φ und ψ seien Endomorphismen des euklidischen Vektorraumes V und φ^* der zu φ adjungierte.
Beweisen Sie: Ist $\varphi^*\psi = 0$, so gilt $\mathrm{im}(\varphi) \perp \mathrm{im}(\psi)$.

Aufgabe 6/3/008
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (8), invariante Unterräume

Index: euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus, invarianter Unterraum

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

P_3 sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 mit dem Skalarprodukt, das durch

$$< f, g > = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2)$$

definiert ist. $\varphi^\star$ sei der adjungierte Endomorphismus des Ableitungsoperators φ von P_3.

(1) Bestimmen Sie die φ-invarianten Unterräume von P_3.

(2) Zeigen Sie: $U \subseteq \mathrm{P}_3$ ist genau dann φ-invariant, wenn $U^\perp$ ein $\varphi^\star$-invarianter Unterraum ist.

(3) Bestimmen Sie die $\varphi^\star$-invarianten Unterräume von P_3.

Aufgabe 6/3/009
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (9), invariante Unterräume

Index: euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus, invarianter Unterraum

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

P_n bezeichne den euklidischen Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das durch

$$<f,g>=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

definiert ist. $\varphi^\star$ sei der adjungierte Endomorphismus des Ableitungsoperators φ von P_n.

(1) Bestimmen Sie die φ-invarianten Unterräume von P_n.

(2) Zeigen Sie: $U \subseteq \mathrm{P}_n$ ist genau dann φ-invariant, wenn $U^\perp$ ein $\varphi^\star$-invarianter Unterraum ist.

(3) Bestimmen Sie die $\varphi^\star$-invarianten Unterräume von P_n.

Aufgabe 6/3/010 (S: Varianten)

Spektralzerlegung (1)

Index: Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Endomorphismus, selbstadjungierter Operator, Orthonormalbasis, Eigenvektor einer Matrix, symmetrische Matrix, Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

Für die folgenden Matrizen A, B ist jeweils eine Orthonormalbasis des euklidischen Standardvektorraumes $\mathbb{R}^3$ zu finden, die aus Eigenvektoren besteht.

(1) $$A=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -14 & 10\\ -14 & -2 & 4\\ 10 & 4 & 10\end{pmatrix},$$

(2) $$B=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & 20 & 10\\ 20 & -2 & -10\\ 10 & -10 & 13\end{pmatrix}.$$

Lösung.

(1) Zunächst bestimmen wir die Eigenwerte der Matrix A; sie ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A=\det(X\cdot \mathrm{E}_3-A)=(X+2)\cdot(X-1)\cdot(X-2)\,,$$

das wir (um unnötige Brüche zu vermeiden) zweckmäßig mittels

$$\begin{aligned}9^3\cdot\chi_A &= \det\begin{pmatrix} 9X-1 & 14 & -10\\ 14 & 9X+2 & -4\\ -10 & -4 & 9X-10\end{pmatrix}\\ &= X^3-X^2-4X+4\end{aligned}$$

berechnet haben. Die Nullstellen sind paarweise verschieden, d.h. jeder der Eigenräume ist eindimensional. Daher genügt es, für jeden Eigenwert λ einen von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektor im Lösungsraum des entsprechenden homogenen linearen Gleichungssystems zu wählen und zu normieren. So finden wir eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(-2,-2,1),\frac{1}{3}(-1,2,2),\frac{1}{3}(2,-1,2)\Big)\,.$$

(2) In diesem Fall wird zunächst analog vorgegangen: Es ist

$$\chi_B = \det(X\cdot \mathrm{E}_3 - B) = (X+3)\cdot(X-2)^2\,,$$

und für den Eigenwert $\lambda_1 = -3$ ergibt sich ein Eigenvektor $(2,-2,-1)$. Der Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$ jedoch ist zweidimensional. Wir bestimmen eine Basis, indem wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen (wobei wieder in der charakteristischen Gleichung Brüche vermieden wurden); wir erhalten mit dem gaußschen Algorithmus (oder „auf den ersten Blick“)

$$\mathcal{B}' = ((1,1,0),(1,0,2))\,.$$

Nach dem Orthogonalisierungsverfahren entsteht daraus

$$\mathcal{B}'_{\text{orth}} = ((1,1,0),(1,-1,4))\,,\ \text{d.h.}$$

$$\mathcal{B} = ((2,-2,-1),(1,1,0),(1,-1,4))$$

ist eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren der Matrix B besteht. Aus $\mathcal{B}$ ergibt sich eine Orthonormalbasis

$$\Big(\frac{1}{3}(2,-2,-1), \frac{\sqrt{2}}{2}(1,1,0), \frac{\sqrt{2}}{6}(1,-1,4)\Big)\,.$$

Anmerkungen. Die Rechnung lässt sich im Fall (2) noch vereinfachen, wenn anstelle der schon wiederholt verwendeten Standardmethode zur Bestimmung des Eigenraumes das orthogonale Komplement zum Eigenraum $V_{\lambda_1} = V_{\lambda_2}^{\perp}$ bestimmt wird.

Unter (2) ist leicht zu erkennen, dass die Aufgabe (da ein mehrfacher Eigenwert existiert) unendlich viele Lösungen besitzt. Manchmal sind mit etwas Glück und rechnerischem Geschick sogar noch „bessere“ zu finden, wie im vorliegenden Fall die Basis

$$\Big(\frac{1}{3}\cdot(2,-2,-1), \frac{1}{3}\cdot(1,2,-2), \frac{1}{3}\cdot(2,1,2)\Big)\,,$$

auf die wir bei systematischem Vorgehen mit dem gaußschen Algorithmus nicht gekommen sind.

Aufgabe 6/3/015

Eine orthogonale Matrix

Index: euklidischer Vektorraum, orthogonale Vektoren, orthogonale Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

a, b seien reelle Zahlen mit $|a|, |b| \le 1$. Zeigen Sie, dass

$$U_{ab} := \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} & 0 \\ b\cdot\sqrt{1-a^2} & -ab & -\sqrt{1-b^2} \\ \sqrt{1-b^2}\cdot\sqrt{1-a^2} & -a\cdot\sqrt{1-b^2} & b \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix ist.

Aufgabe 6/3/020

Spektralzerlegung (2)

Index: Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Endomorphismus, selbstadjungierter Operator, Orthonormalbasis, Eigenvektor einer Matrix, symmetrische Matrix, Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

Wir betrachten den Endomorphismus φ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^4$, der bezüglich der Standardbasis die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

hat. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis, für die die Matrix von φ Diagonalgestalt hat. Geben Sie diese Diagonalmatrix an!

Aufgabe 6/3/030
Spektralzerlegung (3)

Index: Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Endomorphismus, selbstadjungierter Operator, Orthonormalbasis, Eigenvektor einer Matrix, symmetrische Matrix, Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

Führen Sie die Spektralzerlegung des euklidischen Standardraumes für die folgende Matrix aus:

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6/3/040
Spektralzerlegung (4)

Index: Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Endomorphismus, selbstadjungierter Operator, Orthonormalbasis, Eigenvektor einer Matrix, symmetrische Matrix, Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

Bestimmen Sie die Eigenwerte der linearen Transformation des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^n$, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird, und suchen Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Aufgabe 6/3/043 (S: Varianten)

Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (10)

Index: adjungierter Endomorphismus, Skalarprodukt, Orthonormalbasis

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

P_2 sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt, das für

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2\,,\quad g = b_0 + b_1X + b_2X^2\,,\quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

durch

$$< f, g >= \ a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$

definiert ist. Wir bezeichnen mit

$$\varphi : \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_2\,,\quad f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}$$

den Ableitungsoperator und mit $\varphi^\star$ seinen adjungierten Endomorphismus.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (f_1,\ f_2\,, f_3)$ mit

$$f_1 = 3X^2 + 2X + 1,\ f_2 = X^2 + X,\ f_3 = 2X^2 + X$$

eine Basis von P_2 ist.

(2) Bestimmen Sie die Matrix von $\varphi^\star$ bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung. Offensichtlich ist $\mathcal{B}' = (1, X, X^2)$ eine Orthonormalbasis für P_2. Es folgt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi^\star) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ nach Satz 6/3/1. Aus

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ergibt sich durch Transposition

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi^\star) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten der Polynome f_i bilden die Spalten einer Matrix, für die auf übliche Weise eine inverse gefunden wird, d.h. $\mathcal{B}$ ist Basis von P_2, und die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}'$ ergibt sich als

$$U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^\star) = U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}'}(\varphi^\star) \cdot U_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6/3/044 (S: Varianten)

Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (11)

Index: adjungierter Endomorphismus, Skalarprodukt, Orthonormalbasis

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

P_2 sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 mit dem Skalarprodukt, das für

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2\,, \quad g = b_0 + b_1X + b_2X^2\,, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}$$

durch

$$<f, g> = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

definiert ist. Wir bezeichnen mit

$$\varphi : \mathrm{P}_2 \to \mathrm{P}_2\,, \quad f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X}$$

den Ableitungsoperator und mit $\varphi^\star$ seinen adjungierten Endomorphismus.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = (f_1,\ f_2\,, f_3)$ mit

$$f_1 = 2X^2 + 3,\ f_2 = 3X + 1,\ f_3 = X^2 - 2X + 1$$

eine Basis von P_2 ist.

(2) Bestimmen Sie die Matrix von $\varphi^\star$ bezüglich $\mathcal{B}$.

Lösung. Offensichtlich gilt

$$<1, X> = \int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$
$$<X, X^2> = \int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0,$$
$$<1, X^2> = \int_{-1}^{1} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

und $(1, X, 3X^2 - 1)$ ist ein Orthogonalbasis in P_2.
Dann ist

$$\mathcal{B}_1 = \frac{1}{4}(2\sqrt{2}, 2\sqrt{6}X, \sqrt{10}(3X^2 - 1))$$

eine Orthonormalbasis in P_2 und es folgt $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi^\star) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$ nach Satz 6/3/1. $\mathcal{B}_2 = (1, X, X^2)$ ist keine Orthonormalbasis für P_2, aber es ist leicht zu sehen, dass

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Daher ergibt sich

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi^\star) = U^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi^\star) \cdot U_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} = U^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} \cdot {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)) \cdot U_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1},$$
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^\star) = U^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi^\star) \cdot U_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2},$$
$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi) = U_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi) \cdot U^{-1}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1},$$

wobei $U_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$, $U_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}$ die Übergangsmatrizen von $\mathcal{B}_2$ zu $\mathcal{B}_1$ bzw. von $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{B}_2$ bezeichnen.
Die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}_1$ zu $\mathcal{B}_2$ ist

$$U_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{10} \\ 0 & 2\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

und es folgt

$$W = U_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot {}^{\mathrm{t}}(U_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}) = \frac{3}{8} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 15 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi^\star) = U_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} \cdot {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{M}_{\mathcal{B}_1}(\varphi)) \cdot U_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1} = W \cdot {}^{\mathrm{t}}(\mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi)) \cdot W^{-1}.$$

Wir finden

$$W^{-1} = \frac{2}{15} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi^\star) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\varphi^\star) &= U_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2}^{-1} \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}_2}(\varphi^\star) \cdot U_{\mathcal{B},\mathcal{B}_2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 22 & 276 & -172 \\ -22 & -336 & 212 \\ -44 & -507 & 314 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6/3/045

Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (12), invariante Unterräume

Index: euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus, invarianter Unterraum

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ in $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt, das für

$$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n,\ g = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n$$

(mit $a_i, b_j \in \mathbb{R}$) durch

$$< f, g > = a_0 b_0 + \ldots + a_n b_n$$

definiert ist. $\varphi^\star$ sei der adjungierte Endomorphismus des Ableitungsoperators φ von P_n.

(1) Bestimmen Sie die φ-invarianten Unterräume von P_n.

(2) Zeigen Sie: $U \subseteq \mathrm{P}_n$ ist genau dann φ-invariant, wenn $U^\perp$ ein $\varphi^\star$-invarianter Unterraum ist.

(3) Bestimmen Sie die $\varphi^\star$-invarianten Unterräume von P_n.

Aufgabe 6/3/046

Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (13), adjungierter eines Projektionsoperators

Index: adjungierter Endomorphismus, Skalarprodukt, Orthonormalbasis

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

φ sei Projektionsoperator eines euklidische Vektorraumes. Zeigen Sie, dass der adjungierte Endomorphismus $\varphi^\star$ von φ ebenfalls ein Projektionsoperator ist.

Aufgabe 6/3/050

Spiegelungen der Ebene

Index: orthogonaler Automorphismus, Geradenspiegelung, Orthonormalbasis, Winkel zwischen zwei Vektoren

Stoffeinheiten: 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen

Wir betrachten die lineare Abbildung $\varphi : E \to E$ der euklidischen Ebene E, die bezüglich einer gegebenen Orthonormalbasis die folgende Matrix

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

besitzt.

(1) Zeigen Sie: φ ist eine Spiegelung.

(2) Geben Sie die Spiegelungsgerade G an (d.h. die Gerade, deren Punkte bei φ unverändert bleiben).

(3) Bestimmen Sie den Winkel zwischen G und der ersten Koordinatenachse.

Aufgabe 6/3/060
Spiegelungen und Drehungen

Index: orthogonaler Automorphismus, Geradenspiegelung, Drehung

Stoffeinheiten: 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen

Geben Sie die Eigenwerte von Drehungen und Spiegelungen der euklidischen Ebene an.

Aufgabe 6/3/070
Orthogonale Abbildungen (1)

Index: euklidischer Vektorraum, orthogonaler Automorphismus, Orthonormalbasis, Geradenspiegelung, Drehung

Stoffeinheiten: 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen

Überprüfen Sie, dass die Matrizen

(1) $$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2) $$\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}+2 & \sqrt{3}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & \sqrt{3}+2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

bezüglich der Standardbasis des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ orthogonale Abbildungen definieren. Beschreiben Sie die Wirkung dieser Abbildungen!

Aufgabe 6/3/080
Orthogonale Abbildungen (2)

Index: euklidischer Vektorraum, orthogonaler Automorphismus, Orthonormalbasis, Geradenspiegelung, Drehung, Drehwinkel

Stoffeinheiten: 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen

Wir betrachten die euklidische Ebene E.

(1) Zeigen Sie: Sind φ und ψ Spiegelungen von E, so ist $\varphi \cdot \psi$ eine Drehung.

(2) Wir beziehen uns nun auf eine fest gewählte Orthonormalbasis und die durch sie gegebene Orientierung.
φ sei die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\frac{\pi}{6}$ geneigt ist, ψ die Spiegelung an der Geraden, die gegen die erste Koordinatenachse um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ geneigt ist. Welchen Drehwinkel hat $\varphi \cdot \psi$?

Aufgabe 6/3/090
Orthogonale Abbildungen (3)

Index: euklidischer Vektorraum, orthogonaler Automorphismus, invarianter Unterraum, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen

Wir betrachten einen euklidischen Vektorraum V und eine orthogonale Transformation $\varphi : V \to V$.

Beweisen Sie: Falls U invariant bezüglich φ ist, so ist auch das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ invariant bezüglich φ.

Aufgabe 6/3/100
Orthogonale Abbildungen (4)

Index: euklidischer Vektorraum, orthogonaler Automorphismus, invarianter Unterraum, orthogonales Komplement

Stoffeinheiten: 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen

V sei ein euklidischer Vektorraum.

(1) Wir wählen zwei Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ mit $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$. Beweisen Sie: Es existiert eine orthogonale Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

(2) Gegeben sind die Vektoren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$ mit $\|\boldsymbol{x}_1\| = \|\boldsymbol{y}_1\|$, $\|\boldsymbol{x}_2\| = \|\boldsymbol{y}_2\|$ und der Eigenschaft, dass der Winkel zwischen $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ mit dem Winkel zwischen $\boldsymbol{y}_1$ und $\boldsymbol{y}_2$ übereinstimmt. Beweisen Sie: Es existiert eine orthogonale Abbildung $\varphi : V \to V$ mit $\varphi(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{y}_1$, $\varphi(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{y}_2$.

Aufgabe 6/3/105
Orthogonale Abbildungen (5)

Index: euklidischer Vektorraum, orthogonaler Automorphismus, Norm eines Vektors, Winkel zwischen zwei Vektoren

Stoffeinheiten: 6/3/14 - 6/3/15 Klassifikation der orthogonalen Abbildungen

E sei eine euklidische Ebene, $\varphi : E \to E$ ein Endomorphismus, $\varphi^{\star}$ sein adjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie:

(1) Ist φ eine Drehung, so ist auch $\varphi^{\star}$ eine Drehung.

(2) Ist φ eine Punktspiegelung, so ist auch $\varphi^{\star}$ Punktspiegelung.

(3) Ist φ eine Geradenspiegelung, so ist auch $\varphi^{\star}$ eine Geradenspiegelung.

Treffen entsprechende Aussagen für einen dreidimensionalen euklidischen Raum zu?

Aufgabe 6/3/110
Spektralzerlegung (5)

Index: orthogonale Summe von Unterräumen, euklidischer Vektorraum, Spektralzerlegung eines selbstadjungierten Automorphismus, symmetrische Matrix, Diagonalisierung einer symmetrischen Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

Zerlegen Sie den 3-dimensionalen euklidischen Standardraum in eine orthogonale Summe von Eigenräumen der durch die symmetrische Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung.

Aufgabe 6/3/120
Ebene Quadriken (1)

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Bestimmen Sie eine metrische Hauptachsenform der Quadrik, die in der euklidischen affinen Ebene $\mathbb{R}^2$ durch das Polynom

$$f = 4X^2 + 32XY + 41Y^2 - 110X - 80Y + 100 \in \mathbb{R}[X, Y]$$

definiert wird und geben Sie die zugehörige Koordinatentransformation an!

Aufgabe 6/3/130
Ebene Quadriken (2)

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Welche Gestalt hat die Quadrik in der euklidischen Standardebene $\mathbb{R}^2$, die durch die folgende Gleichung gegeben ist?

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 + 130x + 90y + 125 = 0$$

Aufgabe 6/3/140 (S: Varianten)
Ebene Quadriken (3)

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken, Bewegung eines euklidischen affinen Raumes

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom

$$f = 2X_1^2 - 8X_1X_2 + 8X_2^2 - 3X_1 + X_2 + 2 \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$$

eine Bewegung der affinen euklidischen Standardebene an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\ X_2\,)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad a_1 = -3, \quad a_2 = 1, \quad a_0 = 2.$$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_2 - A) = X^2 - 10X$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 10$ und $\lambda_2 = 0$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem $A\cdot x = \lambda_1 x$, d.h. gleichbedeutend das System

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(1, -2)$ erzeugt, und da der Eigenraum des anderen Eigenwertes orthogonal zu diesem ist, ergibt sich nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^2$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2), \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)\,.$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = U\cdot\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 10Y_1^2 - \sqrt{5}Y_1 - \sqrt{5}Y_2 + 2$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{\mathrm{t}}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$f = 10(Y_1 - \frac{1}{20}\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}Y_2 + \frac{15}{8}.$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 + \frac{1}{20}\sqrt{5}\,, \quad Y_2 = Z_2 + \frac{3}{8}\sqrt{5}$$

erhalten wir

$$f = 10Z_1^2 - \sqrt{5}Z_2\,,$$

woraus nach Multiplikation mit $\frac{2}{5}\sqrt{5}$ die Gestalt

$$g = 4\sqrt{5}Z_1^2 - 2Z_2$$

entsteht; dies ist die Hauptachsenform einer Parabel.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{1}{5}\sqrt{5}Z_1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}Z_2 + \frac{4}{5}\,,$$
$$X_2 = -\frac{2}{5}\sqrt{5}Z_1 + \frac{1}{5}\sqrt{5}Z_2 + \frac{11}{40}\,.$$

Aufgabe 6/3/150
Quadriken (4), Beispiel in der Dimension 4

Index: metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken, Quadrik

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Im 4-dimensionalen euklidischen Standardraum wird durch das Polynom

$$f := Y^2 - 4YZ + Z^2 - 2XU + 2X - 4Y + 2Z \in \mathbb{R}[X,Y,Z,U]$$

eine Quadrik $Q = \mathrm{V}(F)$ gegeben. Bestimmen Sie eine Hauptachsenform für f und die zugehörige orthogonale Koordinatentransformation.

Aufgabe 6/3/160
Normale Endomorphismen (1)

Index: unitärer Vektorraum, normaler Operator

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

V sei ein unitärer Vektorraum. Zeigen Sie, dass eine Projektion
$\varphi : V \to V$ genau dann normal ist, wenn $\mathrm{im}(\varphi) \perp \ker(\varphi)$.

Aufgabe 6/3/170
Eigenschaften des adjungierten Endomorphismus (14)

Index: unitärer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus, orthogonale Summe von Unterräumen

Stoffeinheiten: 6/3/1 - 6/3/8 Der adjungierte Endomorphismus

(1) V sei ein unitärer Vektorraum, $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, $\varphi^\star$ der adjungierte. Zeigen Sie: $\ker(\varphi^\star) \oplus \mathrm{im}(\varphi) = V$.

(2) Nun sei $A \in \mathrm{M}(m,n;\mathbb{C})\,, b \in \mathrm{M}(m,1,\mathbb{C})$. Beweisen Sie: Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn b zum Lösungsraum von ${}^{\mathrm{t}}\overline{A}\cdot x = b$ orthogonal ist.

Aufgabe 6/3/180
Normale Endomorphismen (2)

Index: unitärer Vektorraum, normaler Operator, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

Sind Summe bzw. Produkt normaler Endomorphismen eines unitären Vektorraumes wieder normal?

Aufgabe 6/3/190
Normale Endomorphismen (3)

Index: euklidischer Vektorraum, normaler Operator, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

P_n sei der euklidische Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ mit dem Skalarprodukt, das für

$$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n, \quad g = b_0 + b_1X + \ldots + b_nX^n \in \mathrm{P}_n$$

durch

$$< f, g >= a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$

definiert ist. Welche der folgenden Endomorphismen sind normal?

(1) $\varphi : \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_n$, gegeben durch den Einsetzungshomomorphismus $X \mapsto -X$ des Polynomringes $\mathbb{R}[X]$,

(2) $\psi_a : \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_n$, gegeben durch den Einsetzungshomomorphismus $X \mapsto X + a$ des Polynomringes $\mathbb{R}[X]$ ($a \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 6/3/200
Normale Endomorphismen (4)

Index: unitärer Vektorraum, normaler Operator, adjungierter Endomorphismus, orthogonale Summe von Unterräumen

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

V sei ein unitärer Vektorraum, φ ein normaler Endomorphismus von V und $\varphi^\star$ sein adjungierter Endomorphismus. Zeigen Sie:

(1) $\mathrm{im}(\varphi) = \mathrm{im}(\varphi^\star)$ und $\ker(\varphi) = \ker(\varphi^\star)$.

(2) $\ker(\varphi) \oplus\!\!\!\!\!\perp \mathrm{im}(\varphi) = V$.

Aufgabe 6/3/210
Normale Endomorphismen (5)

Index: unitärer Vektorraum, normaler Operator, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

V sei ein unitärer Vektorraum, $\varphi : V \to V$ ein normaler Endomorphismus. Zeigen Sie:

(1) $< \varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y}) > = < \varphi^\star(\boldsymbol{x}), \varphi^*(\boldsymbol{y}) >$ für alle $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$.

(2) $\|\varphi(\boldsymbol{x})\| = \|\varphi^\star(\boldsymbol{x})\|$ für alle $\boldsymbol{x} \in V$.

(3) $\psi : V \to V$ sei ein weiterer normaler Endomorphismus von V, so gilt genau dann $\varphi \cdot \psi = \mathbf{0}$, wenn $\psi \cdot \varphi = \mathbf{0}$.

Aufgabe 6/3/220
Normale Endomorphismen (6)

Index: unitärer Vektorraum, normaler Operator, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

V sei ein unitärer Vektorraum, $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus und $\varphi^\star$ der adjungierte Endomorphismus. Zeigen Sie:
Ist φ ein normaler Operator, so sind die Eigenvektoren von φ auch Eigenvektoren von $\varphi^\star$.

Aufgabe 6/3/230
Normale Endomorphismen (7)

Index: unitärer Vektorraum, normaler Operator, Orthonormalbasis

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

V sei ein unitärer Vektorraum und φ, ψ normale Endomorphismen von V, für die $\varphi\cdot\psi = \psi\cdot\varphi$ gilt.
Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis von V existiert, deren Vektoren sowohl Eigenvektoren von φ als auch von ψ sind.

Aufgabe 6/3/240
Normale Endomorphismen (8)

Index: unitärer Vektorraum, normaler Operator, Orthonormalbasis, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/3/9 - 6/3/13 Spektralsatz für normale Operatoren

V, W seien unitäre $\mathbb{K}$-Vektorräume und $\mathcal{B}_V = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) \in V^n$, $\mathcal{B}_W = (\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_m) \in W^m$ Orthonormalbasen in V bzw. W.

(1) Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt $V \otimes_{\mathbb{K}} W$ ebenfalls einen unitären Vektorraum $(V, W, <\,,>)$ bildet, wenn die hermitesche Form $<\,,>$ bezüglich des Tensorprodukts $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W$ der gegebenen Basen von V und W durch
$$<\boldsymbol{b}_i \otimes \boldsymbol{c}_j, \boldsymbol{b}_k \otimes \boldsymbol{c}_l)> = \delta_{ik}\cdot\delta_{jl}, \quad i,k \in \{1, \ldots, n\}, \quad j,l \in \{1, \ldots, m\}$$
definiert wird (damit ist die Matrix von $<\,,>$ bezüglich $\mathcal{B}_V \otimes \mathcal{B}_W$ angegeben).

(2) Zeigen Sie, dass der adjungierte Endomorphismus des Tensorprodukts $\varphi \otimes_{\mathbb{K}} \psi$ zweier Endomorphismen $\varphi : V \to V$, $\psi : W \to W$ das Tensorprodukt der adjungierten Endomorphismen $\varphi^\star$, $\psi^\star$ ist.

(3) Zeigen Sie, dass das Tensorprodukt normaler Endomorphismen ebenfalls normal ist.

Aufgabe 6/3/250 (S: Varianten)
Quadriken (5), Ellipsoid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,
$$f = 2X_1^2 + \sqrt{2}X_1X_2 + 2X_2^2 + \sqrt{2}X_2X_3 + 2X_3^2 - X_1 + X_2 - 2X_3 + (\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{48})$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\ X_2\ X_3\,)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 4 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 4\end{pmatrix}$$

sowie $a_1 = -1,\ \ a_2 = 1,\ \ a_3 = -2,\ \ a_0 = (\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{48})$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_3 - A) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 1$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}0\,1\,0\\1\,0\,1\\0\,1\,0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist von dem Vektor $(-1, 0, 1)$ erzeugt; Fortsetzung dieses Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\,\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{v}_2,\ \boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(-1, 0, 1),$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{pmatrix} = U\cdot\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{pmatrix},\quad U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1 & 1\end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom, in

$$f = 2Y_1^2 + 3Y_2^2 + Y_3^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}Y_1 + (\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{3}{2})Y_2 - (\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2})Y_3 + (\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{1}{48})$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{\mathrm{t}}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$2\cdot(Y_1 + \frac{1}{8}\sqrt{2})^2 + 3\cdot(Y_2 + (\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{4}))^2 + 1\cdot(Y_3 - (\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{4}))^2 - 1$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 - \frac{1}{8}\sqrt{2},$$
$$Y_2 = Z_2 - (\frac{1}{12}\sqrt{2} - \frac{1}{4}),$$
$$Y_3 = Z_3 + (\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{4})$$

erhalten wir

$$f = 2Z_1^2 + 3Z_2^2 + Z_3^2 - 1\,;$$

dies ist die Hauptachsenform eines Ellipsoids.
Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 + (\frac{1}{12}\sqrt{2} + \frac{3}{8})\,,$$
$$X_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 - (\frac{1}{4}\sqrt{2} + \frac{1}{3})\,,$$
$$X_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 + (\frac{1}{12}\sqrt{2} + \frac{5}{8}).$$

Aufgabe 6/3/260 (S: Varianten)
Quadriken (6), Kegel

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = X_1^2 + 3\sqrt{2}X_1X_2 - 2X_1X_3 + 3\sqrt{2}X_2X_3 + X_3^2 + 2X_2 - X_3 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{16})$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\ X_2\ X_3\,)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3\sqrt{2} & -2 \\ 3\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \\ -2 & 3\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

sowie $a_1 = 0,\ \ a_2 = 2,\ \ a_3 = -1,\ \ a_0 = -(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{16})$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_3 - A) = X^3 - 2X^2 - 9X + 18$ und erhalten die Eigenwerte

$\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -3$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -3\sqrt{2} & 2 \\ -3\sqrt{2} & 4 & -3\sqrt{2} \\ 2 & -3\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(-1, 0, 1)$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{(\sqrt{2})}(-1, 0, 1),$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 2Y_1^2 + 3Y_2^2 - 3Y_3^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Y_1 + (\sqrt{2} - \frac{1}{2})Y_2 - (\sqrt{2} + \frac{1}{2})Y_3 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{16})$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{\mathrm{t}}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$2 \cdot (Y_1 - \frac{1}{8}\sqrt{2})^2 + 3 \cdot (Y_2 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{12}))^2 - 3 \cdot (Y_3 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{12}))^2$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 + \frac{1}{8}\sqrt{2},$$

$$Y_2 = Z_2 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{12}),$$

$$Y_3 = Z_3 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{12})$$

erhalten wir

$$f = 2Z_1^2 + 3Z_2^2 - 3Z_3^2\,;$$

dies ist die Hauptachsenform eines Kegels.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{8}),$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 + \frac{1}{12}\sqrt{2},$$

$$X_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{8}).$$

Aufgabe 6/3/270 (S: Varianten)
Quadriken (7), einschaliges Hyperboloid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = 2X_1^2 - \sqrt{2}X_1X_2 + \sqrt{2}X_1X_3 - 4X_2X_3 + 2X_1 - 3X_2 - 3X_3 - \frac{31}{12}$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\;X_2\;X_3\,)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 & -4 \\ \sqrt{2} & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

sowie $a_1 = 2,\;\; a_2 = -3,\;\; a_3 = -3,\;\; a_0 = -\dfrac{31}{12}$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_3 - A) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -2$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 & 4 \\ -\sqrt{2} & 4 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(-\sqrt{2}, -1, 1)$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\,\boldsymbol{v}_1,\,\boldsymbol{v}_2,\,\boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}, -1, 1),$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 1),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(0, 1, 1).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U\cdot\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix},\quad U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom, in

$$f = Y_1^2 + 3Y_2^2 - 2Y_3^2 - \sqrt{2}Y_1 + \sqrt{2}Y_2 + 3\sqrt{2}Y_3 - \frac{31}{12}$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{t}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$1\cdot(Y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + 3\cdot(Y_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2})^2 - 2\cdot(Y_3 - \frac{3}{4}\sqrt{2})^2 - 1$$

transformiert. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$Y_2 = Z_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2},$$
$$Y_3 = Z_3 + \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

erhalten wir

$$f = Z_1^2 + 3Z_2^2 - 2Z_3^2 - 1\,;$$

dies ist die Hauptachsenform eines einschaligen Hyperboloids.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 - \frac{2}{3}\,,$$
$$X_2 = -\frac{1}{2}Z_1 - \frac{1}{2}Z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{3}{4})\,,$$
$$X_3 = \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{3}{4}).$$

Aufgabe 6/3/280 (S: Varianten)

Quadriken (8), elliptisches Paraboloid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = \frac{19}{18}X_1^2 + \frac{17}{9}X_1X_2 + \frac{19}{18}X_2^2 + \frac{4}{9}X_1X_3 - \frac{4}{9}X_2X_3 + \frac{8}{9}X_3^2 - 2X_2 - X_3 + 1$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\ X_2\ X_3\,)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 19 & 17 & 4 \\ 17 & 19 & -4 \\ 4 & -4 & 16 \end{pmatrix},$$

sowie $a_1 = 0,\ \ a_2 = -2,\ \ a_3 = -1,\ \ a_0 = 1.$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A) = X^3 - 3X^2 + 2X$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 0$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 17 & -17 & -4 \\ -17 & 17 & 4 \\ -4 & 4 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(1,1,0)$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(1,1,0),$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{(3\cdot\sqrt{2})}(1,-1,4),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,-1).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \\ -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 2Y_1^2 + Y_2^2 + \sqrt{2}Y_1 - \frac{1}{3}\sqrt{2}Y_2 + \frac{5}{3}Y_3 + 1$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^tUAU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$2\cdot(Y_1 + \frac{1}{4}\sqrt{2})^2 + 1\cdot(Y_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2})^2 + (\frac{5}{3}Y_3 + \frac{25}{36})$$

transformiert. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1 - \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

$$Y_2 = Z_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}$$

$$Y_3 = -\frac{6}{5}Z_3 - \frac{5}{12}$$

erhalten wir

$$f = 2Z_1^2 + Z_2^2 - 2Z_3\,;$$

dies ist die Hauptachsenform für ein elliptisches Paraboloid.
Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}Z_2 - \frac{4}{5}Z_3 + \frac{1}{36}\,,$$
$$X_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{6}\sqrt{2}Z_2 + \frac{4}{5}Z_3 + \frac{17}{36}\,,$$
$$X_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2}Z_2 + \frac{2}{5}Z_3 + \frac{13}{36}.$$

Aufgabe 6/3/290 (S: Varianten)
Quadriken (9), hyperbolisches Paraboloid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = \frac{13}{9}X_1^2 - \frac{4}{9}X_1X_2 - \frac{8}{9}X_2^2 + \frac{28}{9}X_1X_3 + \frac{4}{9}X_2X_3 + \frac{13}{9}X_3^2 + 2X_1 - 2X_3 - 1$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\ X_2\ X_3\,)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 14 \\ -2 & -8 & 2 \\ 14 & 2 & 13 \end{pmatrix},$$

sowie $a_1 = 2,\ \ a_2 = 0,\ \ a_3 = -2,\ \ a_0 = -1$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X \cdot E_3 - A) = X^3 - 2X^2 - 3X$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 3\,, \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 0$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 14 & 2 & -14 \\ 2 & 35 & -2 \\ -14 & -2 & 14 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(1,0,1)$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahrens ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(1,0,1),$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{(-3\cdot\sqrt{2})}(-1,-4,1),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{3}(2,-1,-2).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U\cdot\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3\sqrt{2} & \sqrt{2} & 4 \\ 0 & 4\sqrt{2} & -2 \\ -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 3Y_1^2 - Y_2^2 + \frac{2}{3}\sqrt{2}Y_2 + \frac{8}{3}Y_3 - 1$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{t}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$3\cdot(Y_1)^2 - 1\cdot(Y_2 - \frac{1}{3}\sqrt{2})^2 + (\frac{8}{3}Y_3 - \frac{7}{9})$$

transformiert. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1 = Z_1$$
$$Y_2 = Z_2 + \frac{1}{3}\sqrt{2}$$
$$Y_3 = -\frac{3}{4}Z_3 + \frac{7}{24}$$

erhalten wir

$$f = 3Z_1^2 - Z_2^2 - 2Z_3\,;$$

dies ist die Hauptachsenform für ein hyperbolisches Paraboloid.
Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 + \frac{1}{6}\sqrt{2}Z_2 - \frac{1}{2}Z_3 + \frac{11}{36}\,,$$
$$X_2 = \frac{2}{3}\sqrt{2}Z_2 + \frac{1}{4}Z_3 + \frac{25}{72}\,,$$
$$X_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{6}\sqrt{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_3 - \frac{11}{36}.$$

Aufgabe 6/3/300 (S: Varianten)

Quadriken (10), zweischaliges Hyperboloid

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$,

$$f = -X_1^2 - 2X_1X_2 - X_2^2 - \sqrt{2}X_1X_3 + \sqrt{2}X_2X_3 + 3X_2 - 2X_3 - (\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{25}{16})$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f = (\,X_1\ X_2\ X_3\,)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 & -\sqrt{2} \\ -2 & -2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

sowie $a_1 = 0,\ \ a_2 = 3,\ \ a_3 = -2,\ \ a_0 = -(\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{25}{16})$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X\cdot E_3 - A) = X^3 + 2X^2 - X - 2$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1\,, \lambda_2 = -2$ und $\lambda_3 = -1$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & \sqrt{2} \\ 2 & 4 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(-1, 1, \sqrt{2})$ erzeugt, und Fortsetzung des Verfahren ergibt nach Normierung eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}(-1, 1, \sqrt{2}),$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{(-\sqrt{2})}(1, 1, 0),$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \frac{1}{2}(-1, 1, -\sqrt{2}).$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten durch die Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ und $\boldsymbol{v}_3$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = U\cdot\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix},\quad U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = Y_1^2 - 2Y_2^2 - Y_3^2 - (\sqrt{2} - \frac{3}{2})Y_1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}Y_2 + (\sqrt{2} + \frac{3}{2})Y_3 - (\frac{3}{2}\sqrt{2} + \frac{25}{16})$$

transformiert wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{\mathrm{t}}UAU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$1\cdot(Y_1-(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}))^2-2\cdot(Y_2+\frac{3}{8}\sqrt{2})^2-1\cdot(Y_3-(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{4}))^2-1$$

überführt. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$Y_1=Z_1+(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{4}),$$
$$Y_2=Z_2-\frac{3}{8}\sqrt{2},$$
$$Y_3=Z_3+(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{4})$$

erhalten wir

$$f=Z_1^2-2Z_2^2-Z_3^2-1\,;$$

dies ist die Hauptachsenform eines zweischaligen Hyperboloids.
Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1=-\frac{1}{2}Z_1-\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2-\frac{1}{2}Z_3-(\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{8})\,,$$
$$X_2=\frac{1}{2}Z_1-\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2+\frac{1}{2}Z_3+(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{3}{8})\,,$$
$$X_3=\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1-\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_3-\frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 6/3/320 (S: Varianten)

Quadriken (12), Beispiele in der Dimension 4

Index: Quadrik, metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Stoffeinheiten: 6/3/18 - 6/3/20 Metrische Hauptachsengleichungen für Quadriken

Geben Sie für das quadratische Polynom $f\in\mathbb{R}[X_1,X_2,X_3,X_4]$,

$$f=-3\sqrt{2}X_1X_2+X_2^2-X_3^2-3\sqrt{2}X_1X_4-2X_2X_4+X_4^2+2X_1-X_2-2X_3+2X_4-(\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{23}{16})$$

eine Bewegung des affinen euklidischen dreidimensionalen Raumes an, so dass nach der entsprechenden Koordinatentransformation und Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Konstanten eine metrische Hauptachsenform entsteht. Bestimmen Sie f im neuen Koordinatensystem.

Lösung. Wir schreiben das Polynom f in der Form

$$f=(\,X_1\;X_2\;X_3\;X_4\,)\cdot A\cdot\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\X_3\\X_4\end{pmatrix}+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4+a_0$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&-3\sqrt{2}&0&-3\sqrt{2}\\-3\sqrt{2}&2&0&-2\\0&0&-2&0\\-3\sqrt{2}&-2&0&2\end{pmatrix}$$

sowie $a_1=2,\;\; a_2=-1,\;\; a_3=-2,\;\; a_4=2,\;\; a_0=-(\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{23}{16})$.

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der A Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu bestimmen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A = \det(X \cdot E_4 - A) = X^4 - X^3 - 11X^2 + 9X + 18$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 2\,, \lambda_2 = 3\ \ \lambda_3 = -1$ und $\lambda_4 = -3$ der Matrix A. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 3\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 3\sqrt{2} & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(0, -1, 0, 1)$ erzeugt; durch Fortsetzung des Verfahren ergibt sich nach Normierung leicht eine Basis $\mathcal{B} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^4$ mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \frac{1}{(\sqrt{2})}(0, -1, 0, 1), \\ \boldsymbol{v}_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 0, -1), \\ \boldsymbol{v}_3 &= (0, 0, 1, 0), \\ \boldsymbol{v}_4 &= \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, 0, 1). \end{aligned}$$

Mit der Übergangsmatrix U, deren Spalten aus den Vektoren $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ und $\boldsymbol{v}_4$ gebildet werden, erhalten wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}, \quad U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

durch die das gegebene Polynom in

$$f = 2Y_1^2 + 3Y_2^2 - Y_3^2 - 3Y_4^2 + \frac{3}{2}\sqrt{2}Y_1 + (\sqrt{2} - \frac{1}{2})Y_2 - 2Y_3 + (\sqrt{2} + \frac{1}{2})Y_4 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{23}{16})$$

überführt wird (natürlich ist die Substitution nur für den linearen Anteil explizit auszuführen, denn die quadratischen Terme entsprechen der Diagonalmatrix ${}^{\mathrm{t}}U A\, U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$).

Durch quadratische Ergänzung wird f in die Form

$$2 \cdot (Y_1 + \frac{3}{8}\sqrt{2})^2 + 3 \cdot (Y_2 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{12}))^2 - 1 \cdot (Y_3 + 1)^2 - 3 \cdot (Y_4 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{12}))^2 - 1$$

transformiert. Nach Verschiebung des Koordinatenursprungs mittels

$$\begin{aligned} Y_1 &= Z_1 - \frac{3}{8}\sqrt{2}, \\ Y_2 &= Z_2 - (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{12}), \\ Y_3 &= Z_3 - 1, \\ Y_4 &= Z_4 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{1}{12}) \end{aligned}$$

erhalten wir

$$f = 2Z_1^2 + 3Z_2^2 - Z_3^2 - 3Z_4^2 - 1\,;$$

dies ist die gesuchte Hauptachsenform.

Als zugehörige Koordinatentransformation entsteht durch schrittweises Einsetzen die Substitution

$$X_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_4 + \frac{1}{12}\sqrt{2}\,,$$
$$X_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_4 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} + \frac{3}{8})\,,$$
$$X_3 = Z_3 - 1\,,$$
$$X_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}Z_1 - \frac{1}{2}Z_2 + \frac{1}{2}Z_4 + (\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{3}{8}).$$

Aufgabe 6/3/330 (S: Varianten)

Polare Zerlegung

Index: Polarzerlegung einer regulären Matrix, orthogonale Matrix, positiv definite symmetrische Matrix

Stoffeinheiten: 6/3/21 - 6/3/26 Polare Zerlegung eines Automorphismus

Finden Sie für die reguläre Matrix

$$A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die polare Zerlegung, d.h. bestimmen Sie symmetrische, positiv definite Matrizen H_1, H_2 sowie eine orthogonale Matrix M, für die $A = M\cdot H_1 = H_2\cdot M$ ist.

Lösung. Wir berechnen $\sqrt{C}$ für

$$C = {}^{\mathrm{t}}A\cdot A = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zunächst wird eine orthogonale Koordinatentransformation ausgeführt, nach der C Diagonalgestalt hat (Spektralzerlegung). Dazu berechnen wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_C = \det(X\cdot \mathrm{E}_2 - C) = X^2 - 5X + 4$ und erhalten die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$ der Matrix C. Zur Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren lösen wir zunächst das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum ist offensichtlich von dem Vektor $(-1,1)$ erzeugt, und da der Eigenraum des anderen Eigenwertes orthogonal zu diesem ist, ergibt sich nach Normierung eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (\,\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2\,)$ des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(-1,1), \quad \boldsymbol{v}_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot(1,1).$$

Durch die Matrix

$$U^{-1} = {}^{\mathrm{t}}U = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Spalten aus den Vektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ gebildet werden, erhalten wir mit $D := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2})$ offensichtlich $D^2 = U\cdot C\cdot U^{-1}$, d.h. $C = U^{-1}\cdot D^2\cdot U$.

Damit ist

$$H_1 = \sqrt{C} = U^{-1}\cdot D\cdot U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

die beiden anderen gesuchten Matrizen erhalten wir als

$$M = A\cdot H_1^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = A\cdot M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6/4/010
Norm eines Endomorphismus (1)

Index: unitärer Vektorraum, Norm eines Endomorphismus, unitärer Automorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/8 - 6/4/13 Norm eines Endomorphismus

φ sei ein Automorphismus des unitären Standardraumes $\mathbb{K}^n$.

(1) Beweisen Sie: Ist φ unitär, so gilt $\|\varphi\| = 1$. Ist die Bedingung auch notwendig?

(2) Gibt es einen Zusammenhang zwischen der Norm von φ und den Eigenwerten von $\sqrt{\varphi^\star \cdot \varphi}$?

Aufgabe 6/4/020
Norm eines Endomorphismus (2)

Index: unitärer Vektorraum, Norm eines Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/8 - 6/4/13 Norm eines Endomorphismus

V bezeichne den unitären Standardraum $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften für beliebige $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ erfüllt sind.

(1) $\|\varphi\| \geq 0$; dabei besteht genau dann Gleichheit, wenn φ die Nullabbildung ist.

(2) $\|\alpha\cdot\varphi\| = |\alpha|\cdot\|\varphi\|$.

(3) $\|\varphi + \psi\| \leq \|\varphi\| + \|\psi\|$.

Aufgabe 6/4/030
Norm eines Endomorphismus (3)

Index: unitärer Vektorraum, Norm eines Endomorphismus, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/8 - 6/4/13 Norm eines Endomorphismus

φ sei ein Endomorphismus des unitären Standardraumes $\mathbb{K}^n$. Beweisen Sie, dass $\|\varphi^\star\| = \|\varphi\|$ ist.

Aufgabe 6/4/040
Exponential eines Endomorphismus, Eigenschaften

Index: Exponential eines Endomorphismus, orthogonaler Automorphismus, euklidischer Vektorraum, adjungierter Endomorphismus

Stoffeinheiten: 6/4/14 - 6/4/15 Das Exponential

φ sei ein Endomorphismus des euklidischen Standardraumes $\mathbb{R}^n$, für den $\varphi^\star = -\varphi$. ist.

(1) Beweisen Sie, dass $\exp(\varphi)$ orthogonal ist.

(2) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass nicht jede orthogonale Abbildung auf diese Weise gewonnen werden kann.

Hinweis. Zeigen Sie im Fall $n = 2$, dass unter der angegebenen Voraussetzung $\det(\exp(\varphi)) = 1$ ist.

Aufgabe 6/4/050 (S: Varianten)
Beispiele 2-dimensionaler linearer dynamischer Systeme, Beschreibung der Orbits

Index: lineares dynamisches System, Exponential einer Matrix, Orbit eines Punktes im Phasenraum, singuläre Punkte eines dynamischen Systems

Stoffeinheiten: 6/4/16 - 6/4/21 Homogene lineare Differenzialgleichungssysteme

Wir betrachten das lineare dynamische System

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A\cdot x$$

im Phasenraum $\mathbb{R}^2$, das durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Skizzieren Sie (ohne Maßstab und bis auf Äquivalenz) die Orbits des Systems. Geben Sie in Ihrer Skizze insbesondere die Lage der singulären Punkte (d.h. der einelementigen Orbits) an.

Lösung. Die Bahnkurve des Systems durch $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\left\{ {}^{\mathrm{t}}x(t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{mit} \quad x(t) = \exp(tA)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir haben daher das Exponential $\exp(tA)$ zu bestimmen, das ganz allgemein mittels der komplexen jordanschen Normalform der Matrix A aufgefunden werden kann. Charakteristisches Polynom ist

$$\det(X\cdot \mathrm{E}_2 - A) = X^2 - 16X + 39.$$

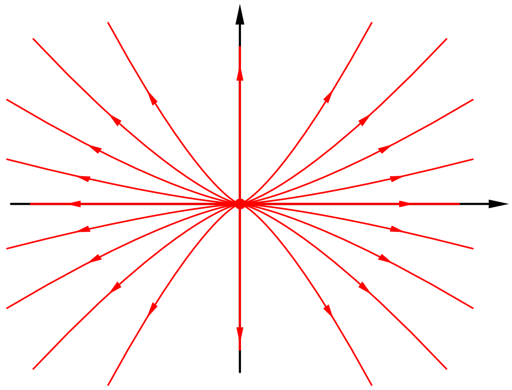
aus $\mathbb{R}[X]$. Es hat die einfachen Nullstellen 3 und 13. Daher ist die Matrix A diagonalisierbar. Sie kann durch eine Ähnlichkeitstransformation in die folgende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

überführt werden; dies entspricht dem Übergang zu einem äquivalenten linearen dynamischen System. Für reelle einfache Eigenwerte erhalten wir

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{13t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

als Orbit durch den Punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ (vgl. auch 6/4/21 (1)). Daraus lassen sich die nachfolgend skizzierten Bahnkurven erkennen.



Es gibt genau einen singulären Orbit $\{(0,0)\}$. Das vorliegende dynamische System ist ein instabiler Knoten.

Aufgabe 6/4/060 (S: Varianten)

Lineare Differenzialgleichungen 3. Ordnung

Index: homogene lineare Differenzialgleichung n-ter Ordnung, Exponential einer Matrix, Fundamentalsystem einer homogenen linearen Differenzialgleichung n-ter Ordnung

Stoffeinheiten: 6/4/22 - 6/4/24 Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung

Bestimmen Sie diejenige Lösung $x(t)$ der homogenen linearen Differenzialgleichung

$$x''' + 9x'' + 27x' + 27x = 0,$$

für die $x(0) = -5,\ x'(0) = 14$ und $x''(0) = -37$ ist.

Lösung. Das aus den Koeffizienten gebildete Polynom $f = X^3+9X^2+27X+27$ zerfällt in ein Produkt $f = (X+3)^3$ von Linearfaktoren. Die gegebene Differenzialgleichung besitzt daher nach 6/4/24 ein Fundamentalsystem

$$(f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \text{ mit}$$
$$f_1(t) = e^{-3t},\ f_2(t) = te^{-3t},\ f_3(t) = t^2e^{-3t}.$$

Da jede Lösung auf eindeutige Weise Linearkombination

$$x(t) = c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) + c_3 \cdot f_3(t)$$

der Lösungen $f_i(t)$ ist, sind nur die Zahlen $c_i \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die die Anfangsbedingung erfüllt ist. Durch Differenzieren erhalten wir

$$f_1'(t) = -3e^{-3t},\quad f_1''(t) = 9e^{-3t}$$
$$f_2'(t) = -3te^{-3t} + e^{-3t},\quad f_2''(t) = 9te^{-3t} - 6e^{-3t}$$
$$f_3'(t) = -3t^2e^{-3t} + 2te^{-3t},\quad f_3''(t) = 9t^2e^{-3t} - 12te^{-3t} + 2e^{-3t}.$$

Für die Ableitungen $x^{(i)}(t)$ ergibt eine Substitution von $t = 0$

$$x^{(i)}(0) = c_1 f_1^{(i)}(0) + c_2 f_2^{(i)}(0) + c_3 f_3^{(i)}(0),\quad i = 0,1,2.$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem

$$c_1 = -5,\quad -3c_1 + c_2 = 14,\quad 9c_1 - 6c_2 + 2c_3 = -37,$$

aus dem wir die Koeffizienten $c_1 = -5,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$ ablesen.

Die gesuchte Lösung ist

$$x(t) = t^2e^{-3t} - te^{-3t} - 5e^{-3t}. \qquad ❏$$

Sachverzeichnis

B

E

H

I

M

Q

R

S