Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 1/2/040

(S: Varianten)

Rechnen mit komplexen Zahlen (1)

Index: komplexe Zahlen, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

- (1) a, b bezeichnen $a = -3i + 2, b = -i - 2 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b, a - b, ab$ und $\frac{a}{b}$ an.
- (2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft
$$x^2 + (2i - 5)x - (3i - 9) = 0.$$
- (3) Lösen Sie die Gleichung $x^3 = 40i$ mit $x \in \mathbb{C}$.

Lösung.

- (1) Es ist $a + b = -4i, a - b = -2i + 4$ und $ab = 4i - 7$.

Den Quotienten $\frac{a}{b}$ erhalten wir als

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot \bar{b}}{b \cdot \bar{b}} = \frac{(-3i + 2) \cdot (i - 2)}{(-i - 2) \cdot (i - 2)} = \frac{8i - 1}{5} = \left(\frac{8}{5}i - \frac{1}{5}\right).$$

- (2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch

$$\left(x + \left(i - \frac{5}{2}\right)\right)^2 = -\left(2i + \frac{15}{4}\right)$$

ausdrücken, gleichbedeutend als

$$(*) \quad 4 \cdot \left(x + \left(i - \frac{5}{2}\right)\right)^2 = -8i - 15.$$

Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-8i - 15$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher

$$(u + vi)^2 = -8i - 15$$

äquivalent zum System

$$(*) \quad \begin{cases} u^2 - v^2 = -15 \\ 2uv = -8. \end{cases}$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt **Lineare Algebra individuell**; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

u ; nun finden wir auch v und prüfen durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

$$z = u + vi = \pm(4i - 1).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus (*) erhalten wir daher

$$2 \cdot \left(x + \left(i - \frac{5}{2}\right)\right) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -3i + 3$ und $x_2 = i + 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.

- (3) Wir setzen $x = u + iv$ mit reellen Zahlen u, v . Die Gleichung $x^3 = 40i$ ist nun äquivalent zu

$$u^3 + 3u^2vi - 3uv^2 - v^3i = 40i,$$

daher zu

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 = 0 \\ 3uv^2 - v^3 = 40. \end{cases}$$

Im Fall $u = 0$ ergibt die zweite dieser Bedingungen $v = -2 \cdot \sqrt[3]{5}$, wobei die erste trivialerweise erfüllt ist.

Ist $u \neq 0$, so erhalten wir aus der ersten Gleichung

$$u^2 - 3v^2 = 0, \text{ d.h. } (u + \sqrt{3}v)(u - \sqrt{3}v) = 0, \text{ also}$$

$$u = \pm\sqrt{3}v$$

und nach Einsetzen in die zweite

$$8v^3 = 40, \text{ daher } v = \sqrt[3]{5}.$$

$x^3 = 40i$ ist daher genau dann erfüllt, wenn x eine der drei Zahlen $x = -2 \cdot \sqrt[3]{5}i$, $x = \pm\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}i$ ist.