Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung[1]
Lineare Algebra individuell ◁ zur Fundstelle

Aufgabe 1/2/050 (S: Varianten)
Rechnen mit komplexen Zahlen (2)

Index: komplexe Zahlen, Körper

Stoffeinheiten: 1/2/7 - 1/2/8 Der Körper der komplexen Zahlen

Rechnen mit komplexen Zahlen:

(1) $a,\ b$ bezeichnen $a = -2i + 2,\ b = -3i + 1 \in \mathbb{C}$. Geben Sie $a + b,\ a - b,\ ab$ und $\frac{a}{b}$ an.

(2) Bestimmen Sie alle komplexen Zahlen x mit der Eigenschaft
$$x^2 + ix + (6i - 2) = 0.$$

Lösung.

(1) Es ist $a + b = -5i + 3,\ a - b = i + 1$ und $ab = -8i - 4$.
Den Quotienten $\dfrac{a}{b}$ erhalten wir als
$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot\bar{b}}{b\cdot\bar{b}} = \frac{(-2i + 2)\cdot(3i + 1)}{(-3i + 1)\cdot(3i + 1)} = \frac{4i + 8}{10} = (\frac{2}{5}i + \frac{4}{5}).$$

(2) Mit quadratischer Ergänzung lässt sich die gegebene Gleichung auch durch
$$(x + \frac{1}{2}i)^2 = -(6i - \frac{7}{4})$$
ausdrücken, gleichbedeutend als
$$(*) \qquad 4\cdot(x + \frac{1}{2}i)^2 = -24i + 7.$$
Dies ist genau dann erfüllt, wenn $-24i + 7$ das Quadrat einer komplexen Zahl $z = u + vi$ ist ($u, v \in \mathbb{R}$). Nun ist $(u + vi)^2 = u^2 - v^2 + 2uvi$, daher
$$(u + vi)^2 = -24i + 7$$
äquivalent zum System
$$\binom{*}{*} \qquad \begin{cases} u^2 - v^2 = 7 \\ \quad 2uv = -24. \end{cases}$$
Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $4u^2$ und quadrieren wir die zweite, so entsteht nach Addition eine leicht zu lösende biquadratische Gleichung für die reelle Zahl u; nun finden wir auch v und prüfen dann durch Einsetzen, ob tatsächlich Lösungspaare (u, v) des Systems vorliegen. Es ergibt sich

[1] Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679
Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.
Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt Lineare Algebra individuell; als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.

$$z = u + vi = \pm(3i - 4).$$

Gleichheit der Quadrate zweier Zahlen bedeutet, dass diese bis auf den Faktor -1 übereinstimmen. Aus $(*)$ erhalten wir daher

$$2\cdot(x + \frac{1}{2}i) = \pm z.$$

Durch Einsetzen von z ergeben sich $x_1 = -2i + 2$ und $x_2 = i - 2$ als diejenigen komplexen Zahlen, für die die Gleichung (2) erfüllt ist.