

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 1/2/270

(S: Varianten)

Der größte gemeinsame Teiler als Vielfachensumme

Index: größter gemeinsamer Teiler, Kettendivision, euklidischer Algorithmus

Stoffeinheiten: 1/2/26 - 1/2/28 Teilbarkeitslehre im Ring der ganzen Zahlen

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler für die ganzen Zahlen $f = 282$, $g = 84$ und stellen ihn als Vielfachensumme dieser Zahlen dar.

Lösung. Wir setzen $r_{-1} := f$ und $r_0 := g$. Für $i > 0$ wird mit r_i der i -te Rest bei der Kettendivision bezeichnet. Dann ergibt sich die folgende Tabelle:

$282 : 84 = 3 \text{ Rest } 30$	$r_{-1} - 3 \cdot r_0 = r_1$	$r_1 = f - 3g$
$84 : 30 = 2 \text{ Rest } 24$	$r_0 - 2 \cdot r_1 = r_2$	$r_2 = -2f + 7g$
$30 : 24 = 1 \text{ Rest } 6$	$r_1 - 1 \cdot r_2 = r_3$	$r_3 = 3f - 10g$

Die erste Spalte enthält den euklidischen Algorithmus (vgl. 1/2/26). In der zweiten Spalte sind die Rekursionen der Reste angegeben, d.h. jeder auftretende Rest ist als Vielfachensumme der vorhergehenden ausgedrückt. Die letzte Spalte der Tabelle entsteht aus der zweiten durch Einsetzen der bereits bekannten Ausdrücke und enthält die Darstellung der Reste als Vielfachensummen von f und g . Da r_2 durch r_3 teilbar ist, ergibt sich $r_3 = 6$ als der größte gemeinsame Teiler. Weiter erhalten wir $6 = 3f - 10g$.

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.