

Marko Roczen und Helmut Wolter
unter Mitarbeit von
Wilfred Pohl, Dorin Popescu, Radu Laza

Aufgabensammlung¹

Lineare Algebra individuell

◁ zur Fundstelle

Aufgabe 1/3/190

(S: Varianten)

Gruppen von Matrizen (1)

Index: Matrix, Matrizenmultiplikation, Gruppe

Stoffeinheiten: 1/3/4 - 1/3/10 Multiplikation von Matrizen

(1) Zeigen Sie, dass die Menge $G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{Q} \right\}$ mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

(2) Lösen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

die Gleichungen $A \cdot X = B$, $Y \cdot A = B$, wobei X, Y Matrizen aus G sind.

(3) Lösen Sie für die zuvor angegebenen Matrizen A, B und eine weitere Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

die Gleichung $A \cdot Z \cdot B = C$.

Ergebnis. Wir geben die Lösungen der Rechenaufgaben (2) und (3) an. Die unbekannten Matrizen X, Y und Z sind leicht aus den angegebenen Bedingungen zu ermitteln. Bezeichnen wir z.B. mit x_1, x_2 die Einträge der ersten Spalte von X , so ergeben sich aus $A \cdot X = B$ die Bedingungen

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 7x_2 = 1 \\ x_2 = 0 \end{array} \right\},$$

aus denen $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$ abzulesen ist. Insgesamt erhalten wir

$$(2) \quad X = Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(3) \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & -13 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¹ Ver. 0.51 (Juli 2004), Institut für Mathematik an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2004 (Preprint; 2004-17), ISSN 1439-9679

Diese Aufgabensammlung entstand mit teilweiser Förderung durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung unter dem Kennzeichen 01NM075D; die Verantwortung für den Inhalt liegt bei den Autoren.

Ähnliche Aufgaben finden Sie im gleichnamigen Internetprojekt [Lineare Algebra individuell](#); als registrierter Nutzer können Sie dort online Aufgaben erzeugen und Lehrstoff nach eigenem Wunsch zusammenstellen lassen.